سوالات ریاضی عمومی آزمون استخدامی دبیر ریاضی سال ۱۳۹۸

۱۰۶- اگر $\alpha + i\beta$ ریشهٔ مختلط معادله $x^3 + 2x + 1 = 0$ باشد، α ریشهٔ حقیقی کدام معادله است؟

۱. $8x^3 - 4x + 1 = 0$

۲. $x^3 - 4x + 1 = 0$

۳. $x^3 + 4x - 1 = 0$

۴. $8x^3 + 4x - 1 = 0$

جواب: $(\alpha + i\beta)$ را در معادله جایگذاری می‌کنیم:

$$(\alpha + i\beta)^3 + 2(\alpha + i\beta) + 1 = 0$$

$$\alpha^3 + 3\alpha^2 i\beta - 3\alpha\beta^2 - i\beta^3 + 2\alpha + 2i\beta + 1 = 0$$

$$\underbrace{(\alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + 2\alpha + 1)}_{=0} + \underbrace{(3\alpha^2\beta - \beta^3 + 2\beta)}_{=0} i = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha\beta^2 + 2\alpha + 1 = 0 \quad (*) \\ 3\alpha^2\beta - \beta^3 + 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \beta(3\alpha^2 - \beta^2 + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \underset{\text{غ ق ق}}{\beta = 0} \quad \text{یا} \quad 3\alpha^2 - \beta^2 + 2 = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\beta^2 = 3\alpha^2 + 2}$$

جایگذاری در $(*)$

$$\alpha^3 - 3\alpha(3\alpha^2 + 2) + 2\alpha + 1 = \alpha^3 - 9\alpha^3 - 6\alpha + 2\alpha + 1 = 0$$

$$\Rightarrow -8\alpha^3 - 4\alpha + 1 = 0 \xRightarrow{\times(-1)} \boxed{8\alpha^3 + 4\alpha - 1 = 0}$$

گزینه ۴ درست است.

۱۰۷. حاصل $\lim_{x \to 0^+} (x^{x^2})$ کدام است؟

۱. صفر ۲. 1 ۳. e ۴. e^2

جواب: فرض کنیم $a = \lim_{x \to 0^+} (x^{x^2})$ از دو طرف تساوی Ln می‌گیریم:

$$Ln\, a = Ln \lim_{x \to 0^+} (x^{x^2})$$

$$= \lim_{x \to 0^+} Ln (x^{x^2}) = \lim_{x \to 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{Ln\, x}{\frac{1}{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}$$

حال می‌توانیم از قاعده هوپیتال استفاده کنیم پس داریم:

$$(Ln\, x)' = \frac{1}{x}$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{\cancel{x}}}{-\frac{2}{x^{\cancel{3}}}} = \lim \frac{1}{-\frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} -\frac{x^2}{2} = 0$$

$$\Rightarrow Ln\, a = 0 \Rightarrow a = e^0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0^+} (x^{x^2}) = 1$$

یعنی گزینه دوم درست است.

۱۰۸- مقدار همگرایی سری $(0/6 + 0/51 + 0/501 + 0/5001 + \dots)$ کدام است؟

۱. سری واگراست ۲. $0/6$ ۳. $1/1$ ۴. صفر

جواب: $0/6 + 0/51 + 0/501 + 0/5001 + \dots$

$$= (0/1 + 0/5) + (0/5 + 0/01) + (0/5 + 0/001) + (0/5 + 0/0001) + \dots$$

$$= \underbrace{(0/5 + 0/5 + \dots)} + (0/1 + 0/01 + 0/001 + \dots) = \infty$$

واگراست $\sum_{i=1}^{\infty}(0/5) = \infty$

سری هندسی با $a = 0/1$ و $q = 0/1$

$$S = \frac{a}{1-q} = \frac{0/1}{1-0/1} = \frac{0/1}{0/9} = \frac{1}{9}$$

پس گزینه اول درست است.

۱۰۹- حاصل انتگرال $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(\mathrm{Arccos}\,x)^2\sqrt{1-x^2}}$ کدام است؟ ۱. $\frac{1}{4\pi}$ ۲. $\frac{1}{\pi}$ ۳. $\frac{1}{2\pi}$ ۴. $\frac{1}{3\pi}$

جواب: تغییر متغیر

$$x = \cos y \rightarrow dx = -\sin y\, dy$$

$$1 - x^2 = 1 - \cos^2 y = \sin^2 y \quad \text{و} \quad \mathrm{Arc}\cos(\cos y) = y$$

پس:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{(\mathrm{Arccos}\,x)^2\sqrt{1-x^2}} = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{-\sin y\, dy}{y^2(\sin y)} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -y^{-2}\, dy$$

$$= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} y^{-2}\, dy$$

$$= \frac{y^{-1}}{-1}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2} = -\frac{1}{y}\Big|_{\pi/3}^{\pi/2}$$

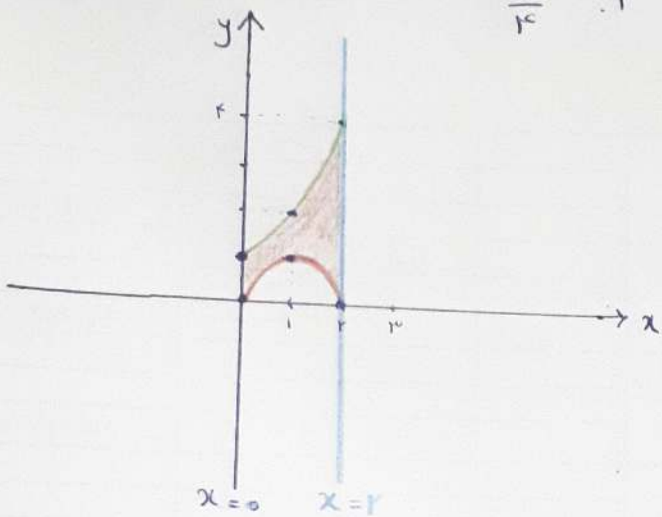
$$= -\left(\frac{3}{\pi} - \frac{2}{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}$$

$\boxed{\begin{array}{l} \text{حدود انتگرال جدید}:\ x = 0 \rightarrow \cos y = 0 \Rightarrow y = \frac{\pi}{2} \\ x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{3} \end{array}}$

پس گزینه دوم درست است.

۱۱۰ - مساحت ناحیه محدود به منحنی‌های $y=2^x$ و $y=2x-x^2$ و خطوط $x=0$ و $x=2$ کدام است؟ $(\ln 2 \simeq 0.6)$

۱. $\frac{8}{3}$ ۲. $\frac{7}{4}$ ۳. $\frac{5}{4}$ ۴. $\frac{11}{3}$



مساحت محدود به f و g : $\int_a^b (f(x)-g(x))\,dx$

$$= \int_0^2 (2^x - 2x + x^2)\,dx$$

$$= \int_0^2 2^x\,dx - 2\int_0^2 x\,dx + \int_0^2 x^2\,dx$$

$$= \frac{1}{\ln 2}\, 2^x \Big|_0^2 - x^2 \Big|_0^2 + \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^2$$

$$= \frac{1}{\ln 2}(4-1) - (4-1) + \frac{1}{3}(8-0)$$

$$= \frac{3}{\ln 2} - 4 + \frac{8}{3} = \frac{3}{\ln 2} - \frac{4}{3} = \frac{9-4\ln 2}{3\ln 2}$$

$$= \frac{9-4\times(0.6)}{3\times(0.6)}$$

$$= \frac{9-2.4}{1.8} = \frac{6.6}{1.8} = \frac{66}{18} = \frac{11}{3}$$

پس گزینه چهار درست است.

۱۱۱. سه صفحه $x+y=2$ ، $x+z=4$ و $z-y=2$

نسبت به هم چه وضعی دارند؟

ج: بردار نرمال هرکدام برابر است با:

$\vec{n}_1=(1,1,0)$

$\vec{n}_2=(1,0,1)$

$\vec{n}_3=(0,-1,1)$

اگر موازی باشند بایستی دو به دو حاصلضرب خارجی این بردارها صفر شود:

$$\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=i\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}-j\begin{vmatrix}1&0\\1&1\end{vmatrix}+k\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix}$$

$$=i-j-k\neq 0$$

پس موازی نیستند (یعنی قطعاً منطبق نیز نیستند) گزینه‌های ۱ و ۴ رد می‌شوند.

با جایگذاری معادله صفحه‌ها در هم می‌بینیم که باهم اشتراک دارند. سعی می‌کنیم این اشتراک را پیدا کنیم.

$x+y=2 \rightarrow y=2-x$

$x+z=4$

$z-y=2 \rightarrow z-2+x=2 \Rightarrow x+z=4$ همان معادله ۲

حال فقط کافی است به یکی از x ، y یا z مقدار دهیم تا بقیه هم پیدا شوند مثلاً

$x=0$

$y=2-0=2 \qquad z=4-x=4-0=4 \qquad (0,2,4)$

پس یک نقطه روی ناحیه‌ی اشتراک صفحات پیدا کردیم به همین ترتیب می‌توان نقاط بی‌شمار دیگری نیز یافت

پس اشتراک صفحات تنها یک نقطه نیست یعنی گزینه ۲ هم رد می‌شود. پس گزینه ۳ صحیح است.

بیشتر از جواب: معادله‌ی خط مذکور:

$A\ (0,2,4)$

$B\ (1,1,3)$

$a=0-1=-1,\quad b=2-1=1,\quad c=4-3=1$

$x_0=1,\quad y_0=1,\quad z_0=3$

معادله خط در فضا (پارامتری)

$$\begin{cases} x=x_0+at\\ y=y_0+bt\\ z=z_0+ct\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1+(-1)t\\ y=1+t\\ z=3+t\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=1-t\\ y=1+t\\ z=3+t\end{cases}$$

۱۱۲. اگر $z = x^5 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$ باشد، حاصل عبارت $\left(x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 6z\right)$ کدام است؟

۱. $\frac{y}{x} f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$

۲. صفر

۳. $-x^5 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$

۴. $-\frac{y}{x^2} f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$

جواب:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^5 f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^5).f\left(\frac{y}{x^2}\right) + x^5.\frac{\partial}{\partial x}\left(f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right)$$

$$= 5x^4.f\left(\frac{y}{x^2}\right) + x^5\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{x^2}\right).f'\left(\frac{y}{x^2}\right)\right)$$

$$= 5x^4 f\left(\frac{y}{x^2}\right) + yx^5 \times \left(\frac{-2}{x^3}\right) \times f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= 5x^4 f\left(\frac{y}{x^2}\right) - 2x^2 y f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^5 f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right) = x^5\frac{\partial}{\partial y}\left(f\left(\frac{y}{x^2}\right)\right) = x^5.\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{x^2}\right).f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= x^3.f'\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} - 6z = 5x^5 f\left(\frac{y}{x^2}\right) - \cancel{2x^3 y f'\left(\frac{y}{x^2}\right)} + \cancel{2x^3 y f'\left(\frac{y}{x^2}\right)} - 6x^5 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

$$= -x^5 f\left(\frac{y}{x^2}\right)$$

گزینه سوم

۱۱۴. بیشترین تغییرات تابع $f(x,y,z)=x\sin z-y\cos z$ در مبدأ مختصات کدام است؟

۱. صفر ۲. ۳ ۳. ۲ ۴. ۱

جواب

$$f'_x(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial x}f(x,y,z)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(x\sin z-y\cos z)=\sin z \rightarrow f'_x=\sin z$$

$$f'_y(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}f(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial y}(x\sin z-y\cos z)=-\cos z \rightarrow f'_y=-\cos z$$

$$f'_z(x,y,z)=\frac{\partial}{\partial z}(f(x,y,z))=\frac{\partial}{\partial z}(x\sin z-y\cos z)=x\cos z+y\sin z$$

$$\rightarrow f'_z=x\cos z+y\sin z$$

$$f'_x(0,0,0)=0 \qquad f'_y(0,0,0)=-1 \qquad f'_z(0,0,0)=0$$

$$\nabla f=f'_x\vec{i}+f'_y\vec{j}+f'_z\vec{k}=\sin z\,\vec{i}-\cos z\,\vec{j}+(x\cos z+y\sin z)\vec{k}$$

$$\nabla f|_0=f'_x(0)\vec{i}+f'_y(0)\vec{j}+f'_z(0)\vec{k}=0\vec{i}-\vec{j}+0\vec{k}=-\vec{j}$$

سریعترین تغییر تابع برابر $|\nabla f|_0|=1$ و در جهت $-\vec{j}$ است.

پس گزینه ۴ درست است.

۱۱۴. اگر میدان برداری $F(x,y,z)=(\underset{M}{x},\underset{N}{y},\underset{P}{z})$ و S رویه محصور به مثلث با رئوس $(۱,۰,۰)$ ، $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۰,۱)$ باشد، انتگرال رویه $\iint_S F.n\,ds$ کدام است؟

۱. $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۲. $\frac{1}{2}$ ۳. ۱   ۴. $\sqrt{2}$

ج. روش اول و ساده تر

طبق قضیه دیورژانس داریم:

$$\iint_S F.n\,ds = \iiint_D \nabla.F\,dv$$

که $\nabla.F = \frac{\partial M}{\partial x}+\frac{\partial N}{\partial y}+\frac{\partial P}{\partial z}$ که در آن M، N و P توابع مؤلفه ای F

$M=x \quad N=y \quad P=z$

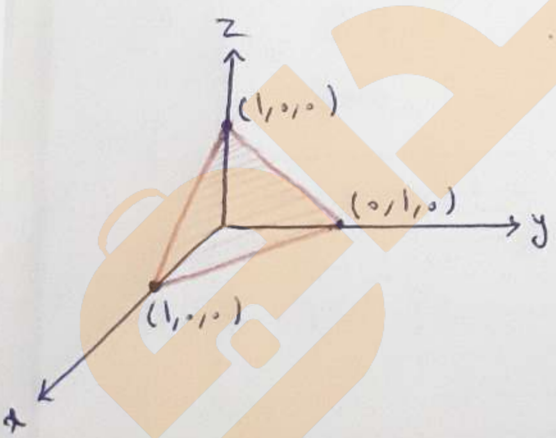
می باشند. پس

$$\nabla.F = \frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y)+\frac{\partial}{\partial z}(z) = 1+1+1 = 3$$

پس

$$\iint_S F.n\,ds = \iiint_D 3\,dv = 3\underbrace{\iiint_D dv}_{\text{حجم محصور زیر } S}$$

$\iiint_S dv$ برابر است با حجم یک هرم با قاعده‌ی مثلث شکل.



حجم هرم : $\frac{1}{3} \times$ مساحت قاعده $\times$ ارتفاع

$$= \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{2}\times1\times1\right)\times 1 = \frac{1}{6}$$

پس داریم:

$$\iint_S F.n\,ds = 3\times\frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

پس جواب گزینه دوم

۱۱۴. روش مستقیم و پیچیده تر

ابتدا معادله صفحه را با داشتن ۳ نقطه از آن حساب می کنیم.

$A(1,0,0) \qquad B(0,1,0) \qquad C(0,0,1)$

محاسبه بردار نرمال صفحه با استفاده از ضرب خارجی :

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1,1,0)$$
$$\overrightarrow{AC} = C - A = (-1,0,1)$$

نرمال صفحه مثلث

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = i\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - j\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = i + j + k$$

$$\Rightarrow a = b = c = 1$$

معادله صفحه : $a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0$

$$\begin{matrix} a=1 & x_0 = 1 \\ b=1 & y_0 = 0 \\ c=1 & z_0 = 0 \end{matrix} \Rightarrow 1(x-1) + 1(y-0) + 1(z-0) = 0 \Rightarrow \boxed{x+y+z=1} : S$$

$\nabla S = i + j + k$

محاسبه ی بردار واحد $\vec{n}$ قائم بر رویه ی S :

$$\vec{n} = + \frac{\nabla S}{|\nabla S|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(i+j+k) \qquad |\nabla S| = \sqrt{1^2+1^2+1^2} = \sqrt{3}$$

محاسبه ی dS :

$$dS = \frac{|\nabla S|}{|\nabla S \cdot p|} \cdot dA$$

که p بردار واحد عمود بر صفحه ی زیر S است

در اینجا $p = \vec{k}$

$$|\nabla S \cdot p| = |(i+j+k) \cdot (k)| = 1$$

$$\Rightarrow dS = \frac{\sqrt{3}}{1} dA \Rightarrow dS = \sqrt{3}\, dA$$

محاسبه $F \cdot n$:

$$F \cdot n = (x,y,z) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\overbrace{x+y+z}^{=1})$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}(1) = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ادامه روش مستقیم :

$$\iint_S F \cdot n \, dS = \iint_S \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3} \, dA$$

$$= \iint_S dA = \int_0^1 \int_0^{1-y} dx \, dy = \int_0^1 (1-y) \, dy$$

$$= \left(y - \frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$