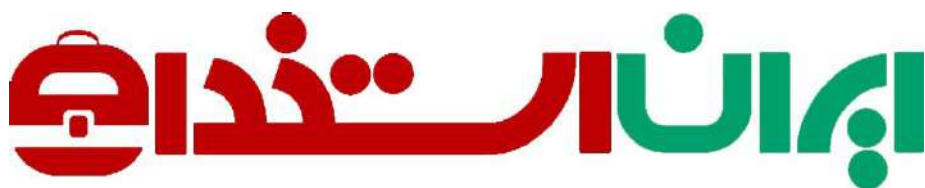




بخشی از محصول:

جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی

(به همراه نمونه سوالات مرتبط)



سرویس خصوصی خدمات عام المنفعه اخبار شغل و استخدام

Www.IranEstekhdam.Ir

کاربران گرامی لطفاً توجه فرمایید: همان طور که در توضیحات پیش از خرید محصول ذکر شده است این بسته حاوی بخشی از جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی می باشد.

اخطار مهم

این فایل بخشی از محصول جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی می باشد که به صورت رایگان و برای آشنایی شما عزیزان از کیفیت و محتوای فایل معرفی شده ارائه شده است. هرگونه سوء استفاده از این فایل همانند استفاده از محتوا در تهیه کتب و یا قرار دادن تمام یا بخشی از آن در وب سایت های دیگر، چه برای فروش و چه به صورت رایگان شرعاً حرام و قانوناً خلاف مقررات و قوانین کشورمان می باشد. با توجه به هزینه های صرف شده و تلاش صورت گرفته برای تهیه این بسته، در صورت مشاهده یا گزارش هرگونه کپی برداری از آن؛ بدون هیچ گونه تماس قبلی و هشدار اقدام به پیگیری حقوقی خواهیم نمود.

Www.IranEstekhdam.Ir

کاربران گرامی لطفا دقت فرمایید، این فایل بخشی از محصول جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی می باشد که به صورت رایگان جهت آشنایی و اطمینان شما کاربران گرامی از کیفیت محتوای این محصول ارائه گردیده است. شما میتوانید در صورت تمایل برای خرید و دانلود کامل سوالات جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی، روی لینک زیر کلیک فرمایید.

لینک دانلود و خرید بسته کامل

فصل اول – مفاهیم پایه ریاضیات

مجموعه‌های عددی

تعریف مجموعه

به هر گروه از اشیاء، اعداد یا افراد که ویژگی مشخصی داشته و اعضای آن از هم متمایز باشند، مجموعه گفته می‌شود. هر یک از این عناصر، «عضو» مجموعه نامیده می‌شود.

نماد رایج برای نمایش یک مجموعه، قرار دادن اعضا بین دو آکولاد (یعنی نماد $\{ \}$ است).

نکته: تغییر ترتیب اعضای مجموعه، آن مجموعه را تغییر نمی‌دهد. به طور مثال داریم:

$$\{1, 2\} = \{2, 1\}$$

نکته: تکرار اعضا یک مجموعه را تغییر نمی‌دهد. به طور مثال داریم:

$$\{1, 1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$$

نمادگذاری مجموعه

برای نمایش مجموعه‌ها از حروف بزرگ انگلیسی مانند $A, B, C, \dots$ استفاده می‌شود.

اعضای مجموعه معمولاً از میان اعداد یا اشیای مشخص انتخاب می‌شوند.

مجموعه تهی

مجموعه‌ای که هیچ عضوی نداشته باشد، «مجموعه تهی» نامیده می‌شود و با نمادهای $\emptyset$ یا $\{ \}$ نمایش داده می‌شود.

مثال: 

مجموعه ریشه‌های معادله $x^2 + 1 = 0$ در مجموعه اعداد حقیقی، تهی است

نکته: مجموعه تهی زیرمجموعه‌ای برای تمام مجموعه‌هاست.

الگوهای عددی و دنباله‌ها

دنباله

دنباله تابعی است که دامنه آن زیر مجموعه‌ای از اعداد طبیعی است و هر عضو آن به صورت مرتب شماره گذاری شده است. دنباله با نماد $\{a_n\}$ نمایش داده می‌شود.

اگر دامنه دنباله متناهی باشد، به آن دنباله متناهی گفته می‌شود و اگر دامنه دنباله نامتناهی باشد، دنباله نامتناهی نامیده می‌شود. (مانند کل اعداد طبیعی)

جمله عمومی

اگر بتوان برای دنباله یک رابطه‌ی کلی (فرمول) تعیین کرد که هر جمله را بر حسب جایگاه آن محاسبه کند، این رابطه را جمله عمومی دنباله می‌نامیم.

مثال: 

دنباله اعداد زوج:

$$a_n = 2n$$

دنباله اعداد فرد بزرگ‌تر از ۱:

$$a_n = 2n + 1$$

دنباله بازگشتی

اگر هر جمله از دنباله با استفاده از یک یا چند جمله قبلی به دست آید، دنباله را بازگشتی می‌نامیم.

مثال: 

دنباله اعداد زوج:

$$a_1 = 2, a_{n+1} = a_n + 2$$

(توجه: مطالب ارائه شده، بخش کوچکی از محتوای محصول اصلی می‌باشند)

سوالات

۱- مجموع عدد طبیعی n و ده برابر n ، مساوی مربع عدد n است. مجموع ارقام n کدام است؟

(وزارت نیرو)

۸ (۲)

۱۱ (۱)

۲ (۴)

۵ (۳)

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۴

ابتدا گفته روی سوال رو به شکل نوشتاری ریاضی تبدیل می‌نویسیم:

$$n + 10n = n^2$$

آنگاه در ادامه داریم:

$$n^2 = 11n \rightarrow n = 11$$

پس مجموع ارقام عدد n برابر خواهد بود با ۲.

۲- اگر $a_1 = -1$ و $a_2 = 3$ باشد، سه جمله از عبارت $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}$ برای مقادیر $n > 2$

چقدر است؟ (وزارت نیرو)

۱، ۷، ۹ (۲)

-۱، -۵، ۷ (۱)

-۱، -۵، -۳ (۴)

-۱، ۷، -۵ (۳)

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۱

طبق صورت سوال باید مقادیر a_3, a_4, a_5 را محاسبه کنیم:

$$a_3 = -a_2 - 2a_1 \rightarrow a_3 = -3 - 2(-1) = -1$$

$$a_4 = -a_3 - 2a_2 \rightarrow a_4 = -(-1) - 2(3) = -5$$

$$a_5 = -a_4 - 2a_3 \rightarrow a_5 = -(-5) - 2(-1) = 7$$

بنابراین گزینه ۱ صحیح است.

فصل دوم – جبر

عبارات جبری

یک جمله‌ای جبری

حاصل ضرب یک عدد حقیقی در یک یا چند مجهول (متغیر) که توان همه آنها عدد حسابی باشد. به طور ساده، یک جمله‌ای به شکل ax^n تعریف می‌شود، که در آن a یک عدد حقیقی (که به آن ضریب عددی می‌گوییم) و n یک عدد صحیح نامنفی است.

در یک جمله‌ای ها، توان متغیر نامعلوم (در اینجا مقدار n) را درجه یک جمله‌ای نسبت به آن متغیر می‌گویند.

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

هرگاه بخواهیم دو یک جمله‌ای را با هم جمع یا از هم کم کنیم، فقط کافیه ضرایب ثابت آنها را با هم جمع یا از هم کم کنیم.

مثال: 

$$ax^n + bx^n = (a + b)x^n \text{ و } ax^n - bx^n = (a - b)x^n$$

چند جمله‌ای

چند جمله‌ای‌ها از ترکیب چند یک جمله‌ای به وجود می‌آیند که درجات یا متغیرهای مختلف دارند.

برای نوشتن چند جمله‌ای‌ها، جملات مشابه را با هم جمع یا از هم کم می‌کنیم.

استاندارد کردن چند جمله‌ای

هرگاه جملات یک چند جمله‌ای بر حسب قوای نزولی یکی از متغیرهای آن چند جمله‌ای (از بزرگ به کوچک) نوشته شده باشد آن چند جمله‌ای استاندارد یا متعارف نامیده می‌شود.

اتحادهای جبری و تجزیه چند جمله‌ای‌ها

اتحادهای جبری

اتحادها در جبر به روابط خاص بین عبارات جبری اشاره دارند که به کمک آن‌ها می‌توان عبارات پیچیده را ساده‌تر کرد. این اتحادها شامل:

- | | | |
|---|---|-----------------|
| ۱ | $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ | مربع دوجمله‌ای |
| ۲ | $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ | مزدوج |
| ۳ | $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$ | جمله مشترک |
| ۴ | $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ | مکعب |
| ۵ | $(a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2) = a^3 \pm b^3$ | چاق و لاغر |
| ۶ | $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$ | مربع سه‌جمله‌ای |

نکته: برای یافتن مجموع ضرایب یک چندجمله‌ای، کافی است به جای تمام متغیرها عدد ۱ را جایگذاری کنیم.

مثال:

$$p = (x^2 - 3x + 1)^2 \xrightarrow{x=1} \text{مجموع ضرایب} = (1 - 3 + 1)^2 = -1$$

تجزیه چندجمله‌ای‌ها

تجزیه چندجمله‌ای‌ها شامل فرآیند شکستن یک عبارت چندجمله‌ای به ضرب جملات ساده‌تر است. این کار معمولاً با استفاده از اتحادهای جبری انجام می‌شود.

روش‌های رایج تجزیه چندجمله‌ای‌ها

۱- استفاده از اتحادها

۲- دسته بندی:

۳- ریشه‌یابی و فاکتور گرفتن:

توان رسانی

توان

توان یک عدد، به معنی ضرب یک عدد در خود به تعداد مشخص است.

به عنوان مثال، اگر $n \geq 1$ باشد، داریم:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \dots \times a}_{n \text{ بار}}$$

که در آن به n «توان» و به a «پایه توان» می‌گوییم.

قواعد توان‌رسانی

۱- ضرب دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی: پایه ثابت مانده و توان‌ها جمع می‌شوند.

(با فرض n و $m \geq 1$)

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

۲- تقسیم دو عدد توان‌دار با پایه‌های مساوی: پایه ثابت مانده و توان‌ها از هم کم می‌شوند.

(با فرض n و $m \geq 1$)

$$a^n \div a^m = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

۳- توان‌دار کردن یک عدد توان‌دار: توان‌ها در هم ضرب می‌شوند.

(با فرض n و $m \geq 1$)

$$(a^n)^m = a^{n \times m}$$

(توجه: مطالب ارائه شده، بخش کوچکی از محتوای محصول اصلی می‌باشند)

سوالات

۱- حاصل عبارت $\sqrt[4]{14-4\sqrt{6}} \times \sqrt{\sqrt{2} + \sqrt{12}}$ کدام است؟ (وزارت نیرو)

(۲) $\sqrt{5}$

(۱) $\sqrt{10}$

(۴) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{3}$

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۱

ابتدا باید فورجه رادیکال ها را برابر کنیم:

$$\sqrt[4]{14-4\sqrt{6}} = \sqrt[4]{(12+2-2\sqrt{24})} = \sqrt[4]{(\sqrt{12}-\sqrt{2})^2} = \sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{2}}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\sqrt[4]{14-4\sqrt{6}} \times \sqrt{\sqrt{12} + \sqrt{2}} = \sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{2}} \times \sqrt{\sqrt{12} + \sqrt{2}}$$

با توجه به اتحاد مزدوج $(a+b) \times (a-b) = a^2 - b^2$ داریم:

$$= \sqrt{(\sqrt{12}-\sqrt{2}) \times (\sqrt{12} + \sqrt{2})} = \sqrt{12-2} = \sqrt{10}$$

۲- ساده شده عبارت $\left(2x + \frac{1}{x-1}\right) \times \left(1 - \frac{1}{2x-1}\right)$ کدام است؟ (نهضت سوادآموزی)

(۲) $2x + 2$

(۱) $2x - 1$

(۴) $2x - 2$

(۳) $4x - 2$

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۳

ابتدا داخل پرانتز ها را هم مخرج کرده و ساده می کنیم:

$$\rightarrow \left(\frac{4x(x-1)+1}{x-1}\right) \times \left(\frac{(2x-1)-1}{2x-1}\right) = \left(\frac{4x^2-4x+1}{x-1}\right) \times \left(\frac{2x-2}{2x-1}\right)$$

حال صورت و مخرج دو کسر را تا جای ممکن ساده می کنیم:

$$\rightarrow \left(\frac{4x^2-4x+1}{x-1}\right) \times \left(\frac{2x-2}{2x-1}\right) = \frac{(2x-1)(2x-1)}{x-1} \times \frac{2(x-1)}{2x-1} = 4x-2$$

فصل سوم – مثلثات

مفاهیم ابتدایی و توابع مثلثاتی

زاویه استاندارد

زاویه‌ای است که رأس آن روی مبدأ مختصات، یک ضلع آن روی محور مثبت x (ضلع اولیه) و ضلع دیگر آن متحرک باشد.

واحدهای اندازه‌گیری زاویه

۱- درجه ($^{\circ}$): با تقسیم محیط یک دایره به ۳۶۰ قسمت مساوی، هر یک از آن ۳۶۰ قسمت، یک درجه هستند.

۲- رادیان (rad): زاویه‌ای که طول کمان آن برابر با شعاع دایره باشد.

نکته: تبدیل بین واحدهای بیان درجه:

$$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$$

مثال:

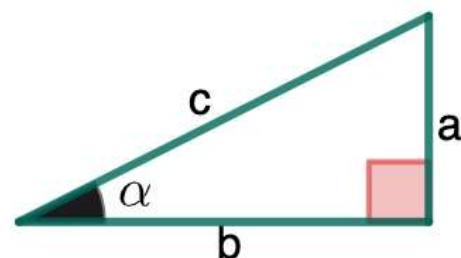
یک رادیان چند درجه است؟

$$\rightarrow \frac{D}{180} = \frac{1}{\pi} \rightarrow D = \frac{180}{\pi} \approx 57^{\circ}$$

نسبت‌های مثلثاتی در مثلث قائم الزاویه

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}, \cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\tan \alpha = \frac{a}{b}, \cot \alpha = \frac{b}{a}$$



نکته: $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ و $\cot x = \frac{1}{\tan x} = \frac{\cos x}{\sin x}$ و $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ و $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

نکته: در هر مثلث قائم الزاویه رابطه فیثاغورث به صورت $r^2 = a^2 + b^2$ برقرار است.

روابط پایه بین توابع مثلثاتی و اتحادهای مثلثات

اتحادهای پایه

- $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
- $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$
- $\cot^2(x) + 1 = \csc^2(x)$

جمع و تفاضل دو زاویه

- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$
- $\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot \alpha \cot \beta \mp 1}{\cot \alpha \pm \cot \beta}$

زاویه دو برابر

- $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$
- $\cos(2\alpha) = \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha)$
- $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)}$
- $\cot(2\alpha) = \frac{\cot^2(\alpha) - 1}{2 \cot(\alpha)}$

(توجه: مطالب ارائه شده، بخش کوچکی از محتوای محصول اصلی می‌باشند)

سوالات

۱- اگر $\frac{1}{\cos x} = \sqrt{1 + m \tan x}$ و انتهای کمان x در ربع چهارم واقع باشد، کدام مورد در خصوص مقادیر m ، صحیح است؟ (وزارت نیرو)

$$m > 0 \quad (2)$$

$$m < 0 \quad (1)$$

$$|m| < 1 \quad (4)$$

$$|m| > 1 \quad (3)$$

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۱

$$\sqrt{1 + m \tan x} = \frac{1}{\cos x} \rightarrow \text{توان دو} \rightarrow 1 + m \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1 + m \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos^2 x + m \sin x \cos x = 1 \rightarrow m \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x$$

$$1 - \cos^2 x = \sin^2 x \text{ که: } \sin^2 x = m \sin x \cos x$$

آنگاه خواهیم داشت:

$$m \sin x \cos x = 1 - \cos^2 x \rightarrow m \sin x \cos x = \sin^2 x \rightarrow m \cos x = \sin x \rightarrow m = \frac{\sin x}{\cos x} \rightarrow m = \tan x$$

با توجه به اینکه در ربع چهارم مثلثاتی مقدار $\tan x$ منفی می‌باشد لذا داریم:

$$m = \tan x < 0 \rightarrow m < 0$$

(توجه: مطالب ارائه شده، بخش کوچکی از محتوای محصول اصلی می‌باشند)

فصل چهارم – توابع

تابع

رابطه f از A به B به شرطی تابع است که دو شرط زیر همزمان برقرار باشد:

به هر عضو A ، عضوی از B را نسبت دهد

در f هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مولفه اول یکسان وجود نداشته باشد.

دامنه تعریف تابع

دامنه توابع $(f(x))$ به مقادیری گفته می‌شود که تابع به ازای آن‌ها معتبر و دارای جواب است. به عنوان مثال دامنه توابع گویا، تمامی مقادیری است که به ازای آن‌ها مخرج کسر برابر با صفر نشود. زیرا اگر چنین اتفاقی بیفتد، مخرج کسر نامعتبر شده و کل تابع نامعتبر می‌شود.

برد تابع

برد تابع به مجموعه‌ای از مقادیر گفته می‌شود که تابع می‌تواند به عنوان خروجی تولید کند.

ترکیب توابع

اگر تابعی به صورت $f \circ g(x)$ یا $f(g(x))$ تعریف شده باشد، ابتدا مقدار $g(x)$ محاسبه می‌شود، سپس همان مقدار به عنوان ورودی f استفاده می‌شود.

بنابراین، دامنه تابع ترکیبی برابر است با مقادیری از X که:

۱- در دامنه‌ی تابع g باشند،

۲- خروجی $g(x)$ در دامنه‌ی f قرار گیرد.

برخی توابع خاص

توابع چند جمله‌ای

دامنه این توابع برابر است با مجموعه اعداد حقیقی و هیچ محدودیتی ندارند.

$$D_f = \mathbb{R}$$

توابع رادیکالی

توابع رادیکالی با ریشه مفرد (مثلا ریشه سوم) هیچ محدودیتی در دامنه ندارند و دامنه آنها همان مجموعه اعداد حقیقی است، ولی توابع رادیکالی با ریشه زوج، باید حتما نامنفی (صفر یا بزرگتر از صفر) باشند زیرا رادیکال‌ها با ریشه زوج فقط برای توابع مثبت پاسخ دارند. یعنی:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt[n]{g(x)} & . n: \text{ فرد} \rightarrow D_f = \mathbb{R} \\ \sqrt[m]{g(x)} & . m: \text{ زوج} \rightarrow D_f = \{x | x \in \mathbb{R} . g(x) \geq 0\} \end{cases}$$

به عنوان مثال، دامنه تابع روبرو را بدست می‌آوریم:

$$f(x) = \sqrt{x^3 - 27} \rightarrow x^3 - 27 \geq 0 \rightarrow x^3 \geq 27 \rightarrow x \geq 3$$

که در نتیجه:

$$D_f = \{x | x \in \mathbb{R} . x \geq 3\}.$$

توابع گویا

دامنه این توابع برابر است با تمامی اعداد حقیقی به جز اعدادی که باعث صفر شدن مخرج می‌شوند.

$$f(x) = \frac{a}{g(x)} \rightarrow D_f = \mathbb{R} - \{x | x \in \mathbb{R} . g(x) = 0\}$$

یا به عبارتی مجموعه اعداد حقیقی به جز x هایی که به ازای آن‌ها مخرج کسر برابر با صفر می‌شود. حالت پیچیده‌تر توابع گویا زمانی است که تابعی که در صورت هست هم دامنه محدودی داشته باشد، یعنی:

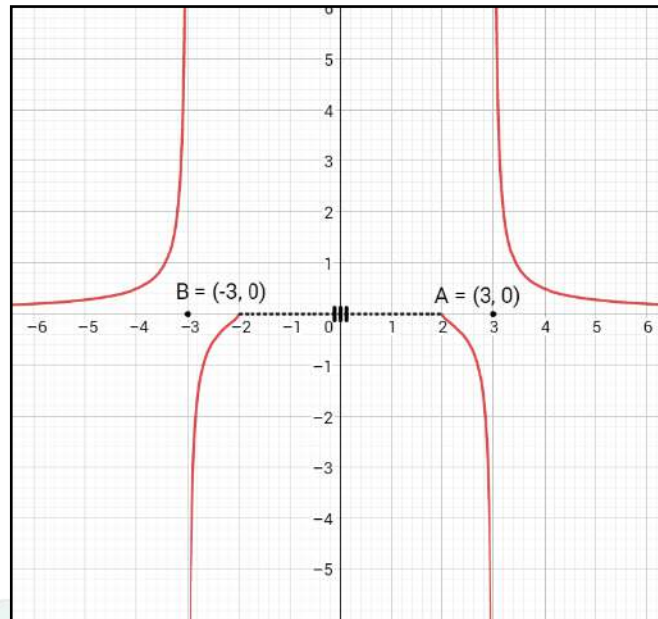
$$f(x) = \frac{h(x)}{g(x)} \rightarrow D_f = \{x | x \in D_h . g(x) \neq 0\}$$

که در این تعریف، D_h به معنای دامنه تابع $h(x)$ است. در این حالت، دامنه محدود شده و برابر می‌شود با اشتراک دامنه توابع صورت و مخرج. به عنوان مثال:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x^2 - 9} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 4 \geq 0 \rightarrow x^2 \geq 4 \rightarrow \begin{cases} x \geq +2 \\ x \leq -2 \end{cases} \\ x^2 - 9 \neq 0 \rightarrow x^2 \neq 9 \rightarrow \begin{cases} x \neq -3 \\ x \neq +3 \end{cases} \end{cases} \rightarrow D_f$$

$$= \{x | -2 \leq x \leq +2, x \neq \pm 3\}$$

که مطابق رسم نمودار، به صحت آن دست می‌یابیم:



همانطور که در نمودار روبرو می‌بینیم، تابع فقط به ازای مقادیری که در بالا تعریف شد، پاسخ دارد و غیر از آن به پاسخی تعریف شده از مجموعه اعداد حقیقی دست نمی‌یابد.

نکته: قابل ذکر است که مقادیر $+\infty$ یا $-\infty$ در مجموعه اعداد حقیقی نیستند، گرچه برای بیان بی‌نهایت از نشان آنها استفاده می‌کنیم. به همین منظور است که ورودی‌هایی که منجر به تعریف نشدن (میل به بی‌نهایت) می‌شوند را از دامنه حذف می‌کنیم.

(توجه: مطالب ارائه شده، بخش کوچکی از محتوای محصول اصلی می‌باشند)

سوالات

۱- مجموعه برد تابع $f = \{(2m^2 + n^2), (n, 3), (-1, 4), (2, 8), (-1, 2m)\}$ چند عضو دارد؟ (وزارت نیرو)

۳ (۲)

۲ (۱)

۴ (۴)

۴ (۳)

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۲

برای اینکه مجموعه‌ای از چندین زوج مرتب تشکیل یک تابع را دهد، اولاً در زوج مرتب‌ها، باید مولفه‌های اول برابر نباشند؛ دوم اینکه اگر مولفه‌های اول برابر باشند، پس مولفه‌های دوم نیز باید یکسان باشند.

در مورد مجموعه زوج مرتب‌های اشاره شده در مساله فوق داریم:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 8 \\ 2m = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 4 + n^2 = 8 \\ m = 2 \end{cases} \rightarrow n = \pm 2$$

با توجه به دو مقدار به دست آمده برای n ، با توجه به اینکه با جایگذاری مقدار ۲ به جای مقدار n ، دو زوج مرتب با مولفه‌های اولیه یکسان ایجاد می‌شود، لذا مقدار $+2$ برای n قابل قبول نمی‌باشد.

آنگاه تابع f به شکل زیر در خواهد بود:

$$f = \{(2, 8), (2, 3), (-1, 4)\}$$

لذا مجموعه برد تابع f شامل سه عضو فوق می‌باشد.

۲- اگر $\log_8 b = \log_4^2$ باشد، آنگاه $\log_4^2$ بر حسب b چقدر است؟ (وزارت نیرو)

$$\frac{1+3b}{6} \quad (۲)$$

$$\frac{2+b}{6} \quad (۱)$$

$$\frac{1+3b}{2} \quad (۴)$$

$$\frac{1+2b}{3} \quad (۳)$$

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۴

ابتدا لگاریتم اول را بر اساس پایه ۱۰ می‌نویسیم:

$$\log_4^{10} = \frac{\log 10}{\log 4} = \frac{\log(2 \times 5)}{\log(2 \times 2)} = \frac{\log 2 + \log 5}{2 \log 2}$$

حال b را نیز بر حسب پایه ۱۰ می‌نویسیم:

$$b = \log_8^5 = \frac{\log 5}{\log(2^3)} = \frac{\log 5}{3 \log 2} \rightarrow \log 5 = 3b \log 2$$

در نهایت خواهیم داشت:

$$\log_4^{10} = \frac{\log 2 + \log 5}{2 \log 2} = \frac{(1 + 3b) \log 2}{2 \log 2} = \frac{1 + 3b}{2}$$

فصل پنجم – تحلیل ریاضی (حد و مشتق)

حد و پیوستگی

تعریف حد

حد یک تابع در یک نقطه، عددی است که وقتی متغیر مستقل x به آن نقطه نزدیک می‌شود (نه لزوماً مساوی)، مقدار تابع نیز به عدد خاصی نزدیک می‌شود.

عبارت ریاضی پایین را در نظر بگیرید:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L$$

در تعریف دقیق‌تر، اگر برای هر عدد مثبت بسیار کوچک ε عددی مثل δ وجود داشته باشد، به‌طوری‌که هر وقت x در فاصله‌ای کمتر از δ از c قرار گیرد (جز خود c ، مقدار $f(x)$ در فاصله‌ای کمتر از ε از L باشد، می‌گوییم حد تابع برابر با L است.

فرم ریاضی:

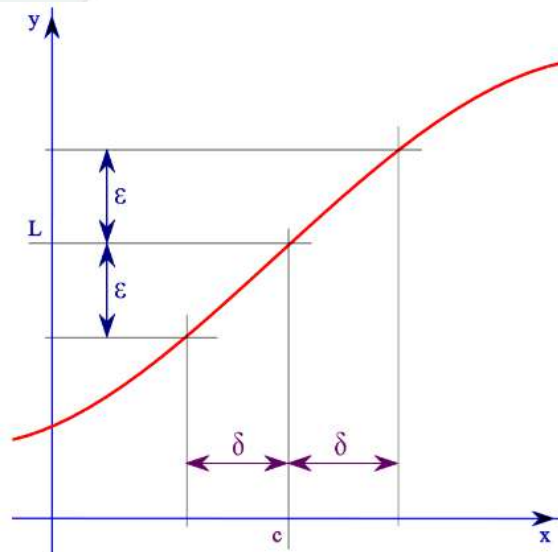
$$\varepsilon > |L - f(x)| \rightarrow \delta > |c - x| > 0$$

به عنوان مثال، اگر داشته باشیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 + 1$$

خواهیم داشت:

-0.1	-0.01	0	$+0.01$	$+0.1$	x
0.99	0.9999	L	1.0001	1.01	$f(x)$



همانطور که می بینیم با نزدیک شدن به ۰، مقدار $f(x)$ به ۱ نزدیک می شود. بنابراین حد تابع $f(x)$ وقتی که x به سمت ۰ میل می کند، برابر می شود با ۱.

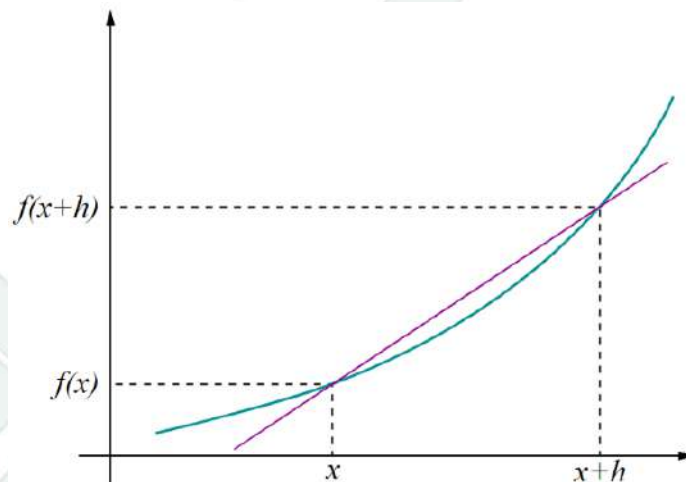
همانطور که می بینیم با نزدیک شدن به ۰، مقدار $f(x)$ به ۱ نزدیک می شود. بنابراین حد تابع $f(x)$ وقتی که x به سمت ۰ میل می کند، برابر می شود با ۱.

وقتی که ورودی را از سمت راست (یعنی بیشتر از C) به C نزدیک می کنیم، از نماد $x \rightarrow C^+$ و وقتی ورودی را از سمت چپ (یعنی مقادیر کمتر از C) به C نزدیک می کنیم از نماد $x \rightarrow C^-$ در عبارت حد استفاده می کنیم.

حد در بسیاری از مسائل ریاضی کاربرد دارد. جدا از بحث پیوستگی و تعیین مقدار حدی توابع در زمانی که خود x یا $f(x)$ به بی نهایت $\pm\infty$ میل می کند، حد از مفاهیم پایه ای مشتق (تغییرات لحظه ای تابع - صعودی یا نزولی بودن) و انتگرال (محاسبه سطح زیر نمودار - عمل معکوس مشتق) به حساب می آید.

مشتق

مشتق یک تابع در نقطه ای مانند x ، برابر است با شیب خط مماس بر نمودار آن تابع در همان نقطه. با توجه به این تعریف، برای نمودار زیر داریم:



$$m = \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

حال اگر بخواهیم به مقدار واقعی تری برای شیب خط مماس بر نمودار در نقطه x برسیم، باید تا می توانیم، $x + h$ را به سمت x نزدیک کنیم (یا به عبارتی، h را تا حد امکان کوچک کنیم). این کار را با استفاده از حد انجام می دهیم.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = f'(x)$$

تعریف مشتق با استفاده از حد

برای به دست آوردن مقدار واقعی تر شیب خط مماس در نقطه‌ی x ، کافی است مقدار h را به سمت صفر میل دهیم:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

به این مقدار، مشتق تابع f در نقطه x گفته می‌شود.

مشتق توابع چندجمله‌ای

در این موارد کافیت توان را به جای ضرب بیاوریم و سپس توان را یکی کم کنیم:

$$f(x) = ax^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a \cdot x^{n-1} \rightarrow f(x) = x \rightarrow f'(x) = 1$$

حالت تعمیم یافته توابع چندجمله‌ای در مواردی است که یک تابع دیگر به توان رسیده باشد، در این صورت داریم:

$$f(x) = a(g(x))^n \rightarrow f'(x) = n \cdot a \cdot g'(x) \cdot g(x)^{n-1}$$

این برای توابع رادیکالی نیز صادق است. زیرا همانطور که گفتیم، توابع رادیکالی را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(x) = \sqrt[n]{(g(x))^m} \rightarrow f(x) = (g(x))^{\frac{n}{m}}$$

(توجه: مطالب ارائه شده، بخش کوچکی از محتوای محصول اصلی می‌باشند)

سوالات

۱- حد عبارت $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16}$ چقدر است؟ (وزارت نیرو)

$$\frac{1}{8} \quad (2)$$

$$\frac{1}{16} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{4} \quad (3)$$

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۲

مرحله اول هر مساله حدی، جایگذاری مقدار در حد است، داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} = \frac{4-4}{16-16} = \frac{0}{0} \rightarrow \text{مبهم}$$

بنابراین لازم است، رفع ابهام کنیم. از اتحاد مزدوج برای رفع ابهام استفاده می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{x-16} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-4)(\sqrt{x}+4)} = \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{x}+4} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} \lim_{x \rightarrow 16} \frac{1}{\sqrt{16}+4} = \frac{1}{8}$$

۲- معادله خط مماس بر منحنی به معادله $e^x + e^{2y} + x + 3y = 2$ در مبدا مختصات کدام است؟

(بانک شهر)

$$y = -x \quad (2)$$

$$y = x \quad (1)$$

$$y = \frac{5}{2}x \quad (4)$$

$$y = -\frac{2}{5}x \quad (3)$$

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۳

برای پیدا کردن معادله خط مماس بر منحنی $e^x + e^{2y} + x + 3y = 2$ در مبدا مختصات، ابتدا مشتق

معادله $e^x + e^{2y} + x + 3y - 2 = 0$ را بر حسب x می‌گیریم:

$$\rightarrow e^x + 2e^{2y} \frac{dy}{dx} + 1 + 3 \frac{dy}{dx} = 0$$

حال $\frac{dy}{dx}$ را تنها می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(e^x + 1)}{2e^{2y} + 3}$$

و سپس نقطه $(0, 0)$ را در معادله بدست آمده جایگذاری می‌کنیم:

$$\frac{dy}{dx}_{(0,0)} = \frac{-(e^0 + 1)}{2e^{2(0)} + 3} = -\frac{2}{5}$$

پس شیب خط مماس در نقطه $(0, 0)$ برابر با $-\frac{2}{5}$ است.

معادله خط مماس به صورت عمومی $y = mx + b$ است که در آن m شیب (در اینجا $-\frac{2}{5}$) و b عرض از مبدا است. چون خط مماس از نقطه $(0, 0)$ عبور می‌کند، بنابراین مقدار $b = 0$ است. معادله خط مماس به شکل زیر خواهد بود:

$$y = -\frac{2}{5}x$$

فصل ششم – ترکیبات

منطق و استدلال ریاضی

آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی به مطالعه گزاره‌ها و روابط بین آن‌ها می‌پردازد.

گزاره

گزاره یک جمله خبری است که می‌تواند درست یا نادرست باشد. معمولاً گزاره‌ها را با حروفی مانند $p, q, r, \dots$ نمایش می‌دهیم.

ارزش گزاره

ارزش یک گزاره، که می‌تواند درست (T) یا نادرست (F) باشد.

نکته: هر گزاره فقط یک ارزش دارد.

نکته: جمله‌های پرسشی، امری و عاطفی جزء گزاره‌ها به حساب نمی‌آیند، زیرا این جملات خبری نیستند و نمی‌توانند دارای ارزش درست یا نادرست باشند.

جدول ارزش گزاره‌ها

هر گزاره می‌تواند یکی از دو ارزش درست یا نادرست را داشته باشد. اگر تعداد گزاره‌ها n باشد، تعداد حالت‌های ممکن (تعداد سطرهای جدول) 2^n خواهد بود. برای نمایش این حالت‌ها، از جدول حقیقت استفاده می‌کنیم. در این جدول، هر سطر به یکی از ترکیب‌های ممکن از ارزش‌های گزاره‌ها مربوط است.

اگر سه گزاره p و q و r داشته باشیم، جدول حقیقت آن‌ها به صورت زیر خواهد بود:

p	q	r
T	T	T
T	T	F
T	F	T
T	F	F
F	T	T
F	T	F
F	F	T
F	F	F

یک گزاره نما به جمله‌ای گفته می‌شود که شامل یک یا چند متغیر است و با جایگذاری مقادیری به جای این متغیرها، به یک گزاره تبدیل می‌شود. برای مثال، جمله «عدد X بزرگتر از ۵ است» یک گزاره نما است که متغیر X در آن وجود دارد.

جبر مجموعه‌ها

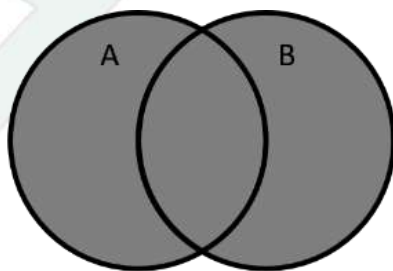
نکته: مفاهیم پایه‌ای مجموعه‌ها در بخش اول فصل اول به طور کامل تعریف شده‌اند. بنابراین، پیش از مطالعه این بخش، مطالعه فصل اول و درک مفاهیم آن ضروری است.

مجموعه مرجع

مجموعه مرجع به مجموعه‌ای گفته می‌شود که تمامی اعضای مجموعه‌های دیگر در آن قرار دارند. این مجموعه به عنوان نقطه‌ی شروع برای مقایسه و بررسی مجموعه‌های مختلف به کار می‌رود. مجموعه مرجع را با نماد U نمایش می‌دهیم.

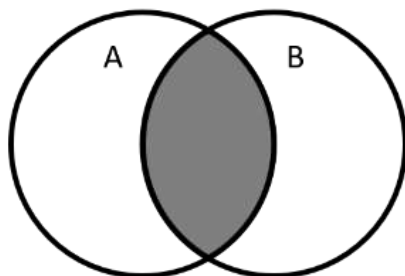
اجتماع دو مجموعه

اجتماع دو مجموعه A و B که با نماد $A \cup B$ نمایش داده می‌شود برابر است با مجموعه همه اعضای که متعلق به حداقل یکی از مجموعه‌های A و B می‌باشند.



اشتراک دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A و B که با نماد $A \cap B$ نمایش داده می‌شود، برابر است با مجموعه همه اعضای که متعلق به هر دو مجموعه A و B می‌باشند.



نکته: چند مجموعه را زمانی مجزا گوئیم که اشتراک تمام آن‌ها به صورت دو به دو برابر با تهی بشود؛ یعنی هیچکدام با دیگری اشتراکی نداشته باشد.

نکته: اجتماع و اشتراک دو مجموعه دارای خاصیت جابه‌جایی هستند. یعنی داریم:

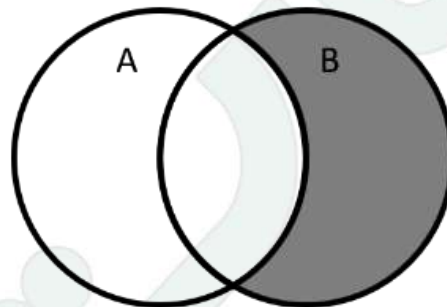
$$\begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

نکته: اجتماع و اشتراک دو مجموعه دارای خاصیت شرکت‌پذیری هستند. یعنی داریم:

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = B \cap (A \cup C) = C \cup (A \cap B) \\ A \cap (B \cup C) = B \cup (A \cap C) = C \cap (A \cup B) \end{cases}$$

تفاضل دو مجموعه

اشتراک دو مجموعه A و B که با نماد $A-B$ یا $B-A$ نمایش داده می‌شود، برابر است با مجموعه همه اعضای A که متعلق به B نمی‌باشند



احتمال

آزمایش تصادفی

به آزمایشی که شرایط انجام آن یکسان باشد ولی نتیجه آن از پیش معلوم نباشد، آزمایش تصادفی می‌گویند. با اینکه نتیجه دقیق آن مشخص نیست، اما می‌توان درباره کل نتایج ممکن یا احتمال آن‌ها پیش‌بینی کرد.

فضای نمونه

مجموعه‌ای از تمام نتایج ممکن در یک آزمایش تصادفی را **فضای نمونه** می‌نامیم و آن را معمولاً با S نمایش می‌دهیم.

در پرتاب یک تاس فضای نمونه را مشخص کنید:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

نکته: فضای نمونه می‌تواند گسسته یا پیوسته باشد.

نکته: فضای نمونه گسسته ممکن است متناهی (مانند پرتاب یک تاس) یا نامتناهی شمارش‌پذیر (مانند پرتاب بی‌نهایت سکه) باشد.

پیشامد

هر زیرمجموعه‌ای از فضای نمونه را یک پیشامد می‌نامیم.

پیشامدها به صورت مجموعه نوشته می‌شوند.

انواع پیشامد

نوع پیشامد	ویژگی	مثال (در پرتاب یک تاس)
ساده	یک عضو	$\{3\}$
مرکب	چند عضو	$\{2, 4, 6\}$
محال	تهی	$\emptyset$
حتمی	برابر با کل فضای نمونه	S

(توجه: مطالب ارائه شده، بخش کوچکی از محتوای محصول اصلی می‌باشند)

سوالات

۱- بررسی ۶ نمره مربوط به یک دانش آموز، دامنه تغییرات و میانگین را به ترتیب ۵ و ۱۵ نشان می دهد. نمرات این دانش آموز در نیمه بعد از میانه هم، اعداد متوالی هستند. مد (نما) نمرات دانش آموز که فراوانی آن ۳ بوده و مقداری بیشتر از کمترین نمره دارد، کدام است؟ (شهرداری)

۱۲ (۲)

۱۳ (۱)

۱۴ (۴)

۱۵ (۳)

پاسخ کارشناس ایران استخدا: گزینه ۳

فرض می کنیم داده ها به فرم:

x, x, x, x, x, x

هستند. از اینکه دامنه تغییرات داده ها ۵ است می توان نتیجه گرفت:

$x, x, x, x, x, x + 5$

میانه عنصر بین داده های سوم و چهارم است. از این نکته که عناصر بعد از میانه متوالی هستند می توان نتیجه گرفت:

$x, x, x, x + 3, x + 4, x + 5$

از اینکه فراوانی مد ۳ است و از حد پایین نمرات (x) بیشتر است می توان نتیجه گرفت که داده ها به فرم زیر هستند:

$x, (x + 3), (x + 3), (x + 3), (x + 4), (x + 5)$

و از این نکته که میانگین این ۶ داده برابر ۱۵ است نتیجه می شود:

$$\frac{x + (x + 3) + (x + 3) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5)}{6} = 15 \rightarrow \frac{6x + 18}{6} = 15 \rightarrow x = 12$$

و مقدار مد این داده ها برابر است با:

$$x + 3 = 12 + 3 = 15$$

۲- واریانس داده‌های آماری ۱۲ و ۱۵ و ۱۳ و ۱۲ و ۱۴ و ۱۳ و ۱۰ و ۱۵ کدام است؟

(تامین اجتماعی)

۲/۲۵ (۲)

۱/۷۵ (۱)

۳ (۴)

۲/۵ (۳)

پاسخ کارشناس ایران استخدام: گزینه ۳

واریانس از رابطه $\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n}$ به دست می‌آید.

پس ابتدا باید میانگین داده‌ها را محاسبه می‌کنیم؛

$$\bar{x} = \frac{۱۲ + ۱۵ + ۱۳ + ۱۲ + ۱۴ + ۱۳ + ۱۰ + ۱۵}{۸} = ۱۳$$

حال مقدار واریانس را با توجه به فرمول محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{(۱۲^۲ - ۱۳^۲)^۲ + (۱۵^۲ - ۱۳^۲)^۲ + (۱۳^۲ - ۱۳^۲)^۲ + (۱۲^۲ - ۱۳^۲)^۲ + (۱۴^۲ - ۱۳^۲)^۲ + (۱۳^۲ - ۱۳^۲)^۲ + (۱۰^۲ - ۱۳^۲)^۲ + (۱۵^۲ - ۱۳^۲)^۲}{۸} \\ &= \frac{۱ + ۴ + ۰ + ۱ + ۱ + ۰ + ۹ + ۴}{۸} = ۲.۵ \end{aligned}$$

کاربران گرامی لطفا دقت فرمایید، این فایل بخشی از محصول جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی می باشد که به صورت رایگان جهت آشنایی و اطمینان شما کاربران گرامی از کیفیت محتوای این محصول ارائه گردیده است. شما میتوانید در صورت تمایل برای خرید و دانلود کامل جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی، روی لینک زیر کلیک فرمایید.

لینک دانلود و خرید بسته کامل



ایران استخدام

سرویس خصوصی خدمات عام المنفعه اخبار شغل و استخدام

Www.IranEstekhdam.Ir

کاربران گرامی لطفا توجه فرمایید: همان طور که در توضیحات پیش از خرید محصول ذکر شده است این بسته حاوی بخشی از جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی بانکی می باشد.

اخطار مهم

این فایل بخشی از محصول جزوه آموزشی ریاضی و آمار مقدماتی می باشد که به صورت رایگان و برای آشنایی شما عزیزان از کیفیت و محتوای فایل معرفی شده ارائه شده است. هرگونه سوء استفاده از این فایل همانند استفاده از محتوا در تهیه کتب و یا قرار دادن تمام یا بخشی از آن در وب سایت های دیگر، چه برای فروش و چه به صورت رایگان شرعاً حرام و قانوناً خلاف مقررات و قوانین کشورمان می باشد. با توجه به هزینه های صرف شده و تلاش صورت گرفته برای تهیه این بسته، در صورت مشاهده یا گزارش هرگونه کپی برداری از آن؛ بدون هیچ گونه تماس قبلی و هشدار اقدام به پیگیری حقوقی خواهیم نمود.

Www.IranEstekhdam.Ir