

$$ax^2 + bx + c = 0$$

معادله درجه دوم:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

۳ حالت داریم:

- ۲ جواب داریم (۲ نقطه متمایز) $\Delta > 0$
- زیرادینکل صفر می شود $\Delta = 0$
- زیرادینکل حقیقی می شود و غیرممکن است $\Delta < 0$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

ریشه مضاعف (مماس)

ریشه ندارد (غیرمتمایز)

معادله حاکم در ریشه است

جمع یا تفاضل

$$x^2 + 5x + 4 = 0$$

$$(x+1)(x+4) = 0$$

تکین علامت بین بالاستقرار

از ضرب و تفاضل یا جمع و تفریق

روش اول، روش دوم و روش تجزیه است.

باید ۲ عدد انتخاب کنیم که جمع یا تفاضلشان

۵ شود و ضرب آنها ۴ شود. فقط (۱ و ۴)

* علامت عدد وسط (۵) می شود ب عدد بزرگتر و اینجا

بین ۱ و ۴ عدد ۵ بزرگتر است.

$$\begin{cases} x = -1 \leftarrow x+1=0 & x=-1 \\ x = -4 \leftarrow x+4=0 & x=-4 \end{cases}$$

* ریشه معادله یعنی جای که با محور x ها در ارتباط است بیضه می کند



دو عددی که ضرب یکدیگر را می‌دهد و حاصل را می‌خواهیم پیدا کنیم.

مثلاً $(2, 3)$ و $(1, 2)$ می‌باشند.

پس اگر می‌خواهیم حاصل ضرب را پیدا کنیم باید به دنبال دو عددی باشیم که حاصل ضرب آن‌ها برابر با عدد مورد نظر باشد.

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-2)(x-3) \rightarrow \begin{cases} \text{جمع} = -5 \\ \text{ضرب} = +6 \end{cases}$$

$$(x+1)(x-7) \rightarrow \begin{cases} \text{جمع} = -5 \\ \text{ضرب} = -7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = 7 \end{cases}$$

اگر معادله درجه دوم ضرب را داشته باشیم و بخواهیم آن را حل کنیم:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\begin{aligned} 1) a + b + c = 0 & \rightarrow x = 1 \\ 2) a + c = b & \rightarrow x = -1 \\ x = \frac{c}{a} & \rightarrow x = -\frac{c}{a} \end{aligned}$$

$$1/3x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$a + b + c = 0 \rightarrow 1/3 - 5 + 2 = 0$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{c}{a} = \frac{2}{1/3} = 6 \end{cases}$$

$$2) 5x^2 + 17x + 12 = 0$$

$$a + b + c = 0 \rightarrow 5 + 17 + 12 = 34 \neq 0$$

$$a + c = b \rightarrow 5 + 12 = 17$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{c}{a} = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

$$\sin = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cot = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

ملاحظات:

[illegible]

مسئله ۵. اکتساب در ۳۰ و به ترتیب ۴۵ - ۶۰ - ۹۰ و ۱۲۰

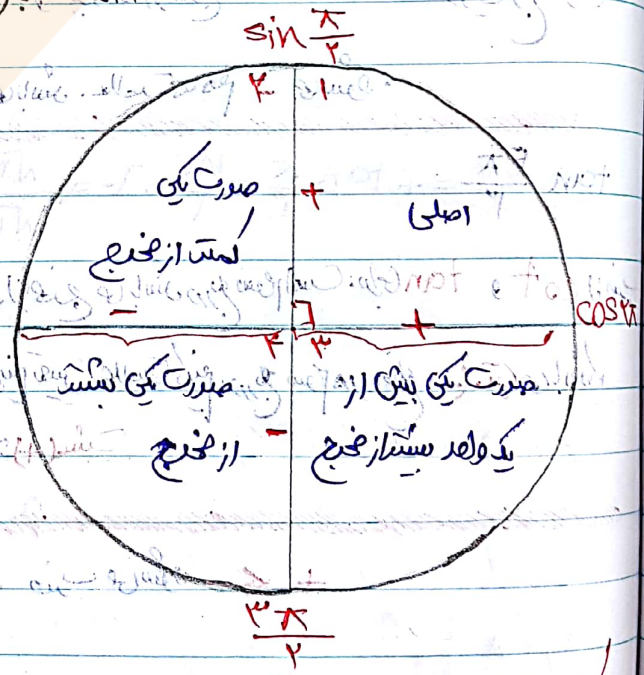
۱. $\sin \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{فرضی}}$
 ۲. $\cos \alpha = \frac{\text{ضلع مجاور}}{\text{فرضی}}$
 ۳. $\tan \alpha = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}}$
 ۴. $\csc \alpha = \frac{1}{\sin \alpha}$
 ۵. $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha}$
 ۶. $\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha}$

$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\tan \gamma = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{1}} = \sqrt{3} \quad \leftarrow \text{باز ۳ و ۱ میسر}$$
$$\tan^* = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} \xrightarrow{\text{sub}} \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{3}{4}}}{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

$\cot \theta = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{g}}$ یا انصاف

$\sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \rightarrow \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$



$$\frac{\pi}{r} = 2$$

$$R = 1 \Omega$$

$$\frac{V_T}{V} = 2V_0$$

$$2\pi = 24.$$

$$\cos \pi = -1 \rightsquigarrow \cot \pi = \infty$$

$\sin \pi = 0 \rightarrow \tan \pi = 0$

$$\cos \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow \cot \frac{\pi}{4} = 0$$

$$\sin^2 \frac{\pi}{4} = 1 \rightarrow \tan^2 \frac{\pi}{4} = \infty$$

cot & cos & tan & sin

الر Sin صند سر ← صند = tan

صفر سے $\leftarrow$ صفر $\text{cot} =$

Costs are classified into two main categories: **Direct Costs** and **Indirect Costs**.

(5). $\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$
 $\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]$
 $(-1) \leftarrow \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$
 $\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$

نکته: در این موارد به عدد صورت تقبیل داریم $\frac{3\pi}{4} \leftarrow$ پ ۳، کاری نداریم فقط برای تعیین علامت از روی شکل پ اون تقبیل داریم.

برای $\tan$ و $\cot$ هر دو علامت ها را در هم ضرب می کنیم.

$$\frac{\pi}{F} = \frac{1A}{F} = \frac{F\Delta}{F}$$

* چون صدور یکی کند از خرج می یابند در ربع دوم دایره است و چون است - (هفتی) هاست ← می شود هفتی

$$\sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{2} \rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \text{is}$$

* صورت دوتا نیز است از خروجی است علامت $\sin$ در این ربع (-) (منفی) می باشد. علامت $\cos$ - می شود.

$$\tan \frac{\pi}{4} = + \tan \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = 1 = + \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}} = \sqrt{1}$$

صورت یکی نیز گنبد از چنانچه می باشد در ربع سوم است. برای $\tan$ و $\cot$ از صورت
 دو تا ضلع مقابل می توانیم تعیین علامت کنیم. در ربع سوم هر دو ضلع (-) منفی می باشند.
 منفی در منفی می شود (+) مثبت

یعنی محور $\sin$ در محور $\cos$ ضرب می شود $\rightarrow +$

$\cot \frac{\pi}{4} = \cot \frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} = \cot \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1}}$

منرب (وضع منقہ رویت) ← منقہ

$$\text{Arc sin } x = \sin^{-1} x$$

مثال:

$$\text{Arc sin } \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

فقط: $\cos$ متقارن است یعنی نسبت ضامق را پس می دهد یعنی:

$$\text{Arc cos}(x) = \pi - \text{Arc cos } x$$

$$\cos(-x) = \cos x$$

~~$$\sin(-x) = -\sin x$$~~

$$\sin(-x) = -\sin x$$

$$\text{Arc sin}(-x) = -\text{Arc sin } x$$

$$\tan(-x) = -\tan x$$

$$\text{Arc tan}(-x) = -\text{Arc tan } x$$

$$\cot(-x) = -\cot x$$

$$\text{Arc cot}(-x) = \pi - \text{Arc cot } x$$

مثال:

$$\text{Arc cos}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \pi - \text{Arc cos } \frac{\sqrt{2}}{2} = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

تعریف ریاضی قدر مطلق: چهار عدد بیرون آمده از قدر مطلق مثبت می باشد.

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

خواص قدر مطلق:

$$1) |x| = a \quad a > 0 \rightarrow x = \pm a$$

$$|x| = v \rightarrow x = \pm v$$

$$2) |x| < a \quad a > 0 \rightarrow -a < x < a$$

$$|x| \leq 1 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$۳) |x| > a \rightsquigarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

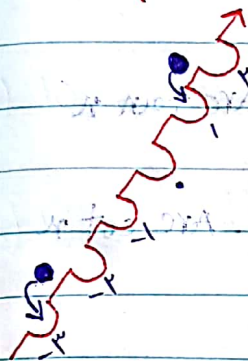
$$|x| > 5 \rightsquigarrow x > 5 \text{ یا } x < -5$$

$$۴) a \leq |x| \leq b \rightsquigarrow a, b > 0 \rightsquigarrow$$

$$a \leq x \leq b \text{ یا } -b \leq x \leq -a$$

$$۲ < |x| \leq 5 \rightsquigarrow ۲ < x \leq 5 \text{ یا } -5 \leq x < -۲$$

چند صیغ: مقدار برابر یک عدد صحیح (غیرکسری - غیر اعشاری - غیر اویگالی) می باشد.



$$[1.7] = 1$$

$$[5] = 5$$

$$[-2.1] = -3$$

$$[-7] = -7$$

خواص چند صیغ:

$$۱) [x \pm K] = [x] \pm K$$

$$[x - 5] = [x] - 5$$

$$[x - [x]] = [x] - [x] = 0$$

صفر صحیح

$$۲) [x] + [-x] = \begin{cases} 0 & x \in \mathbb{Z} \\ -1 & x \notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$[x] = K \rightsquigarrow K \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow K \leq x < K+1$$

$[x] = \Delta x \rightarrow x$ خط

تابع sgn :

$$1) \text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

$$\text{sgn}(+7.0) = 1$$

$$\text{sgn}(-\sqrt{2}) = -1$$

توان:

$$a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n \rightarrow x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n}} \quad a=1 \rightarrow 1^n = 1$$

بعضی از توان‌های که باید یاد داشت باشیم.

$$2^0 = 1 \quad 2^1 = 2 \quad 2^2 = 4 \quad 2^3 = 8 \quad 2^4 = 16 \quad 2^5 = 32 \quad 2^6 = 64$$

$$2^7 = 128 \quad 2^8 = 256 \quad 2^9 = 512 \quad 2^{10} = 1024$$

$$x^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{x^r}$$

$$x^{\frac{1}{r}} = \sqrt[r]{x}$$

$$1) \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$2) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$3) \sqrt{a \pm b} \neq \sqrt{a} \pm \sqrt{b} \quad \text{اما این مثال استنباط است}$$

تابع نمایی: تابعی که x در توان باشد، (تابع نمایی می‌گویند).

$$y = a^x$$

$$a \neq 1$$

$$a > 0$$

$$\text{نمونه: } y = 2^x$$

$$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$$

$$y = 5^x$$

تابع گارتم: مکتوس تابع ضایع، ا تابع گارتمی می گویند.

$$1) y = \log_a^n \quad a \neq 1, a > 0$$

$$1) y = 2^n \rightarrow y = \log_2^n$$

$$2) y = 10^n \rightarrow y = \log_{10}^n = \log^n$$

اگر پایه ی گارتم، انفرستن ۱۰، در تقار می گیریم.

$$3) y = e^n \rightarrow y = \log_e^n = \ln^n$$

$$4) \log_b^a = c \rightarrow b^c = a \rightarrow \log_5^{125} = 3$$

$$5) \log_e^{a \times b} = \log_e^a + \log_e^b$$

خاص گارتم:

$$1) \log_a^a = 1 = \ln e = 1$$

$$2) \log_a^1 = 0 = \ln 1 = 0$$

$$3) \log_b^{a^n} = \frac{n}{m} \log_b^a \rightarrow K \log_b^a = \log_b^{a^K}$$

$$4) -\log_b^{\frac{1}{a}} = +\log_b^a = -\log_b^{\frac{1}{b}} = \log_b^{\frac{1}{\frac{1}{b}}}$$

مثال: گارتم زیر، را بدست آورید.

$$\log_{125}^{125} = \log_{5^3}^{5^3} = \frac{3}{3} \log_5^5 = \frac{3}{3}$$

$$(125)^{\frac{1}{3}} = (\sqrt[3]{125}) = 5 \quad \text{وکتو} \quad b = a$$

$$5) \log_b^a = \frac{\log_a a}{\log_a b}$$

$$7) \log_b^a = \frac{\log_c^a}{\log_c^b} \rightarrow \log_3^5 = \frac{\log_5^5}{\log_5^3} \rightarrow \log_3^5 = \frac{1}{\log_5^3}$$

$$v) a^{\log_c^b} = b^{\log_c^a} \Rightarrow c^{\log_c^a} = a$$

$$3^{\log_5^5} = 5^{\log_5^3}$$

$$3^{\log_5^5} = 5^{\log_5^3} = 5$$

$$8) \log_c^a + \log_c^b = \log_c^{a \times b}$$

$$9) \log_c^a - \log_c^b = \log_c^{\frac{a}{b}}$$

نکته: e و $\ln$ هرگاه بدون واسطه نیست سرهم قرار گیرند یکدیگر را خنثی می کنند.

$$e^{\frac{1}{3} \ln 27} = e^{\ln(27)^{\frac{1}{3}}} = \sqrt[3]{27} = 3$$

مثال: تست کنکور اگر $f(x) = e^x - 3e^{-x}$ باشد مقدار $f(\frac{1}{3} \ln 3)$

$$f(\frac{1}{3} \ln 3) = e^{\frac{1}{3} \ln 3} - 3e^{-\frac{1}{3} \ln 3} = \sqrt[3]{3} - \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = 0$$

$$e^{\frac{1}{3} \ln 3} = \sqrt[3]{3} \quad e^{-\frac{1}{3} \ln 3} = \frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

$$\sqrt[3]{3} - \frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{3} = 0$$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{3}} = \left(\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3}} \right) = \frac{\sqrt[3]{3}}{1} = \sqrt[3]{3}$$

دو یا کردن: خروج شامل ۲ امکان یا یک رادیکال و یک عبارت باشد (صورت و مخرج را به

مزدوج خروج ضرب کنیم.)

$$\frac{3}{\sqrt{3}} = \left(\times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \right) = \frac{3\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$$

روش اول:

$$\frac{1}{\sqrt{3}-2} \left(\times \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{3}+2} \right) = \frac{\sqrt{3}+2}{3-4}$$

روش دوم:

باشد مقدار $F(\sqrt{\log_{10} 2})$

$$F(x) = \begin{cases} 2x^2 + 1 & x \leq 2 \\ \frac{1}{x-2} & 2 < x < 3 \\ 2x-5 & x \geq 3 \end{cases}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1} \quad \frac{2\sqrt{2}+1}{2} \quad \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \quad \frac{\sqrt{2}+1}{2}$$

$$F(\sqrt{\log_{10} 2}) = F(\sqrt{\log_{10} 2}) = F(\sqrt{1})$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}-2} \left(\times \frac{\sqrt{1}+2}{\sqrt{1}+2} \right) = \frac{\sqrt{1}+2}{1-4} = \frac{\sqrt{1}+2}{-3} = \frac{2\sqrt{2}+1}{-3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3}$$

مثال بالا، از اتحاد مزدوج، داریم

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$$

مثال: اگر $F(x) = (10^x)_{10}^{-1}$ باشد، مقدار تابع $y = x^{F(x)}$ با فرض

$$y = -x^2 + 2x$$

(۴) غیر متقاطع

(۳) یک نقطه تلاقی

(۲) دو نقطه تلاقی

(۱) مماس

$$f(x) = \frac{1}{\log x} = 10^{\frac{1}{x}}$$

خاصیت شماره ۵

$$y = x = x^{\frac{1}{1}} = 10^{\frac{1}{1}} = 10^1 = 10$$

خاصیت شماره ۷

$$-x^2 + 2x - 1 = 0 \Rightarrow \frac{-x^2}{a} + \frac{2x}{b} - \frac{1}{c} = 0$$

از روش در جدول می‌کنیم.

$$(b^2 - 4ac) \Rightarrow \Delta = 4 - 4(-1)(-1) = -4 < 0$$

غیرمقاطع

۲ نقطه تلاقی

۲ ریشه دارد

$\Delta > 0$

غیرمقاطع

ریشه ندارد

$\Delta < 0$

مماس

مماس

$\Delta = 0$

« مجموعه ها »

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}$$

$$Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$$

$$W = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

$$Q = N \cup W \cup Z$$

$$R = \{e, \pi, \dots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots\}$$

R

اعداد حقیقی

تابع :

داشته تابع : به صورتی که برای تابع مشکل ایجاد نکند و تابع تابع می گویم یا هم از روی تعریف

① $D_f = \mathbb{R}$

تابع چند جمله ای

② $D_f = \mathbb{R} - \{ \text{ریشه های غیر صحیح} \}$

تابع کسری

③ $D_f = \{ x \mid x \text{ زیر رادیکال} \}$

$F(x) = \sqrt{x}$ درجه زوج

④ $D_f = \{ x \mid \begin{matrix} 0 < x \\ \square > 0 \end{matrix} \}$
 $\rightarrow \neq 1$

$F(x) = \log_{10} x$

⑤ $D_f = \{ x \mid 0 < x \}$

$F(x) = \ln x$

⑥ $D_f = \{ x \mid -1 < x < 1 \}$

$F(x) = \begin{matrix} \text{ARC SIN} \\ \text{ARC COS} \end{matrix}$

شماره (۲) خارج کسری نباید صفر باشد

شماره (۳) زیر رادیکال نباید حقیقی باشد ولی صفر می تواند باشد.

شماره (۴) عبارت جلوی لگاریتم صفر و متقی نمی تواند باشد و حین لگاریتم صفر و او

حقیقی نمی تواند باشد.

شماره (۵) عبارت جلوی $\ln$ صفر و حقیقی نمی تواند باشد.

مثال (۱) عبارت جبری Arc sin و Arc cos بس از ۱ یا کمتر از ۱ - یعنی بتواند باشد.

(خود ۱ و -۱ و اعداد مابین می تواند باشد)

حل تست های دامنی تابع :

نکته : چنانچه محدودیتی در صورت نسبت وجود داشته باشد با استفاده از آن گزینش ها را حذف کنید.

نکته (۲) : چنانچه محدودیت وجود نداشته باشد بس از ۱ گزینش باقی ماند از عدد گذاری استفاده کنید.

همواره عدد بزرگتری انتخاب شود که در نصف گزینش ها باشد و در نصف گزینش ها نباشد.

$$f(x) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{\sqrt{x^2-1}}$$

مثال : دامنه تابع مقابل چند می شود :

۱) $[-1, 1]$ ۲) $[-3, 3]$ ۳) $(-1, 1) \cup (1, 3]$ ۴) $[-3, 1] \cup (1, 3]$

نکته : در این مثال چون به ۱ داخل خارج از دامنه پس خارج صفر باشد پس تمامی اعدادی که

مزان ۱ وجود داشته باشد حذف می شود. چون خارج نباید صفر شود پس گزینش او ۲ حذف :

۱) $x = 2 \rightarrow y = \frac{\sqrt{9-4}}{\sqrt{4-1}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$

عدد زیر رادیکال نباید
مثبت شود پس گزینش ۱ را
غلط است.

$$f(x) = \sqrt{\log \frac{x+2}{x^2}}$$

مثال : دامنه تابع زیر را بیابید :

۱) $(0, 2]$ ۲) $(-2, 0)$ ۳) $(-2, 0) \cup (1, 2)$ ۴) $[-1, 0] \cup (0, 2]$

مثال: دامنه تابع مقابل را بیابید.

1) $f(x) = \arcsin \frac{1+x}{2x}$

2) $f(x) = \arcsin \frac{1+x}{2x}$

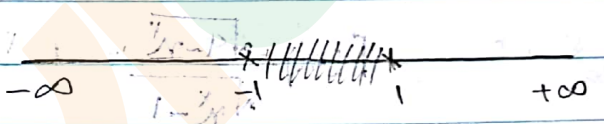
3) $f(x) = \arcsin \frac{1+x}{2x}$

$$f(x) = \arcsin \frac{1+x}{2x}$$

مثال: دامنه تابع مقابل را بیابید.

- 1) $\{ -1, 1 \}$ 2) $(-1, 1)$ 3) $[-1, 1]$ 4) $[-1, 1) \cup (1, +\infty)$

نکته: چون خروجی کسری نباید صفر شود پس



نکته: 2 و 3 حذف می شود چون صفر می شود دارد.

نکته: جوی $\arcsin$ باید عددی بین -1 و 1 باشد.

نکته: $x=1$ $\xrightarrow{\text{گزینه 1}}$ $\arcsin \frac{2}{2}$

$$f(x) = \sqrt{\log \frac{11x - 2x^2}{12}}$$

مثال: دامنه تابع مقابل را بیابید.

- 1) $(\frac{3}{2}, 7)$ 2) $(\frac{1}{2}, 3)$ 3) $[\frac{3}{2}, 4]$ 4) $(\frac{11}{2}, 5)$

نکته: در مورد علامت $\log$ اگر عدد بزرگتر از 1 باشد دو طرفه است از 1 باشد حاصل

تک طرفه مثبت است و ضابطه یکی بزرگتر از 1 و دیگری کوچکتر از 1 باشد ضابطه یک طرفه مثبت است.

$$x = 5 \xrightarrow{\text{گزینه اول}} y = \sqrt{10g_{11}} = \sqrt{\text{عدد منفی}} \quad \times$$

$$x = 4 \xrightarrow{\text{گزینه سوم}} y = \sqrt{10g_{11}} = \sqrt{10g_1} = \sqrt{10} \quad \checkmark$$

مثال: مقدار تابع $f(x) = \left[\frac{2}{x} \right]$ در کدام بازه برابر صنف است؟

۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $R - [-2, 2]$ ۳) $(2, +\infty)$ ۴) $(-2, 0)$

$(-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

$$x = -3 \xrightarrow{\text{گزینه اول}} y = \left[\frac{2}{-3} \right] = -1 \quad \text{غ}$$

$$x = 4 \xrightarrow{\text{گزینه سوم}} y = \left[\frac{2}{4} \right] = 0 \quad \checkmark$$

مثال: در کدام بازه نمودار $y = x^2 e^{-x}$ بالای نمودار $y = x^2$ قرار دارد؟

۱) $[0, \infty)$ ۲) $(0, +\infty)$ ۳) $(-\infty, +\infty)$ ۴) $(-\infty, 0)$

$$x^2 e^{-x} > x^2 \xrightarrow{\text{تقسیم بر } x^2} e^{-x} > 1$$

$$x = 0 \xrightarrow{\text{گزینه اول}} e^0 > 1 \xrightarrow{\text{غلط}} \left(1 > 1 \right) \quad \text{غ} \quad \left\{ \begin{array}{l} e^0 = 1 \\ e^1 = 2.7 \end{array} \right.$$

$$x = 1 \xrightarrow{\text{گزینه دوم}} e^1 > 1 \xrightarrow{\text{درست}} 2.7 > 1 \quad \checkmark$$

بُرد تابع *

بُرد تابع یا حوزه مقاربت تابع: مجموعه مقادیری که به ازای تمام آنها تابع به دست می آید.

موارد زیر را بخاطر بسپارید:

$$\left. \begin{array}{l} \text{فرد} \\ x \\ \tan x \\ \cot x \end{array} \right\} \in (-\infty, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{زوج} \\ x \\ \tan x \\ \cot x \\ |x| \\ \sqrt{x} \end{array} \right\} \in [0, +\infty)$$

$$e^{ax} \in (0, +\infty)$$

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \\ \cos x \end{array} \right\} \in [-1, 1]$$

$$[x] + [-x] \in [-1, 0] \quad x - [x] \in [0, 1]$$

$$\left. \begin{array}{l} [x] - x \\ x + [-x] \end{array} \right\} \in (-1, 0]$$

توضیحات:

(۱) هر کدام از عبارات فوق که در صورت نسبت دیده شود بجای آن m جایگذاری کنید.

(۲) چنانچه m دارای توان باشد یا داخل لگاریتم باشد مستقیماً آن را نیز محاسبه کنید و

چنانچه داخل برده m باشد جایگزین کنید.

بردار چهارم از توابع زیر را بیابید.

$$y = 2^{[x]-n}$$

مثال: برد تابع زیر را بیابید.

$$y = 2^{[x]-n} \xrightarrow{m=[x]-n} y = 2^m$$

$$m \in (-1, 0] \rightarrow y = 2^m \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$R = \left(\frac{1}{2}, 1\right]$$

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

مثال: برد توابع زیر را بیابید.

قاعده در توان: هرگاه f در $(-\infty, +\infty)$ ادا شود، f در $(-\infty, +\infty)$ ادا شود.

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \xrightarrow{e^x = m} y = \frac{m-1}{m+1}$$

در $(-\infty, +\infty)$ ادا شود. و به y حذف می شود.

$$m \in (0, +\infty) \rightarrow y = \frac{m-1}{m+1} \in (-1, 1)$$

$$y = \frac{m-1}{m+1} \in (-1, 1) \xrightarrow{\text{مرتب}} R = (-1, 1)$$

$$f(+\infty) = \frac{m}{m} = 1$$

$$y = 2 + e^{-x+1}$$

مثال: برد تابع زیر را بیابید.

$$y = 2 + e^{-x+1} \xrightarrow{m=e^{-x+1}} y = 2 + m$$

$$m \in (0, +\infty) \rightarrow y = 2 + m \in (2, +\infty)$$

$$y = 2 + m \in (2, +\infty) \xrightarrow{\text{مرتب}} R = (2, +\infty)$$

مثال: برد تابع زیر را بیابید. $f(x) = \sin^2 x - \sin x$ $m = \sin x$ $y = m^2 - m$

$$y' = 2m - 1 = 0 \rightarrow 2m = 1 \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$m \in \left[-1, \frac{1}{2}, 1\right]$$

$$y = m^2 - m \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right] \xrightarrow{\text{مرتبه کردن}} R = \left[-\frac{1}{4}, 0\right]$$

$$f(x) = 2\sqrt{x} + x^2$$

مثال: برد تابع زیر را بیابید.

$$2\sqrt{x} + x^2 \quad m = \sqrt{x} \rightarrow y = 2m + m^2$$

$$y' = 2 + 2m = 0 \rightarrow 2m = -2 \rightarrow m = -1$$

$$m \in [0, +\infty)$$

$$y = 2m + m^2 \in [0, +\infty) \rightarrow R = [0, +\infty)$$

$$f(+\infty) \sim m^2 = +\infty$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \ln 0 = -\infty \\ \ln 1 = 0 \\ \ln +\infty = +\infty \\ \ln \infty = \infty \\ e^{+\infty} = +\infty \\ e^{-\infty} = 0 \end{array} \right.$$

م



۲۹- دامنه تابع باضابطه $F(x) = \sqrt{2x - x^2} + \text{Arcsin}(1 + 2x - x^2)$ برای x است

$x=1$ $\xrightarrow{\text{گزینه ۱}} \text{Arcsin}(1 + 2(1) - 1^2) = \text{Arcsin} 2$ غ $\times$

$x=0$ $\xrightarrow{\text{گزینه ۲}} F(x) = \sqrt{2(0) - 0^2} + \text{Arcsin}(1 + 2(0) - 0^2) = \sqrt{0} + \text{Arcsin} 1$ ✓

۳۰- دامنه تابع $y = \sqrt{2 - [x]}$ برابر است با: $[0, 2]$

$y = \sqrt{2 - [x]} \Rightarrow x=3 \xrightarrow{\text{گزینه ۲}} \sqrt{2 - [3]} = \sqrt{2 - 3} = \sqrt{-1}$ غلط $\times$

$x=2$ $\xrightarrow{\text{گزینه ۳}} \sqrt{2 - [2]} = \sqrt{0}$ ✓

توضیح: جزو صمیم $[x]$ نیز ۲ می شود. $x=2.1 \xrightarrow{\text{گزینه ۱}} \sqrt{2 - [2.1]} = \sqrt{2 - 2} = \sqrt{0}$ ✓

۳۱- دامنه تابع باضابطه $F(x) = \sqrt{2 - \log_2(x-1)}$ برای x است

$x=7$ $\xrightarrow{\text{گزینه ۱}} \sqrt{2 - \log_2 7}$ غلط $\times$

$x=5$ $\xrightarrow{\text{گزینه ۲}} \sqrt{2 - \log_2 5} = \sqrt{2 - 2} = 0$ ✓

$x=2$ $\xrightarrow{\text{گزینه ۳}} \sqrt{2 - \log_2 2} = \sqrt{2 - 1} = \sqrt{1}$ ✓

۳۲- بر دامنه تابع باضابطه $F(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2}$ برای x است

$F(x) = \ln \frac{1-x^2}{1+x^2} \xrightarrow{x=m} \ln \frac{1-m}{1+m}$

$m \in [0, +\infty)$

$\ln \frac{1-m}{1+m} \in (-1, 1) \rightarrow R = (-1, 1]$

$R = \ln(-1, 1] = \ln[0, 1] = (-\infty, 0]$

$\ln 0 = -\infty$

$\ln 1 = 0$

$\ln 1 = 0$



$$1 + f(r^{-n}) \xrightarrow{n^r = m} 1 + f(r^{-m})$$

$$m \in [0, +\infty)$$

$$1 + f(r^0) = \Delta(1) = \textcircled{5}$$

$$1 + f(r^{-m}) \in [5, \dots)$$

$$1 + f(r^{(+\infty)}) = 1 + f(r^{-\infty}) = 1 + f(-) = \textcircled{0}$$

۳۴- تابع باضابطه $F(n) = \sqrt{2 - 10 \log(n^2 - 18n)}$ بدون باره امتداد

$$n = 5 \xrightarrow{\text{گزینه ۲}} \sqrt{2 - 10 \log(25 - 90)} \quad \times \quad \text{عدد حقیقی نگردد، پس منطقی نیست}$$

$$n = -5 \xrightarrow{\text{گزینه ۳}} \sqrt{2 - 10 \log(25 + 90)} = \sqrt{2 - 10 \log 110} = \sqrt{2 - 2} = \sqrt{0} \quad \checkmark$$

۳۵- بد تابع باضابطه $F(n) = (1 - n + [n])^{-\frac{1}{4}}$ بدون باره امتداد

$$F(n) = (1 - n + [n])^{-\frac{1}{4}} \xrightarrow{-n + [n] = m} y = (1 + m)^{-\frac{1}{4}}$$

$$R = (1 + (-1, 0])^{-\frac{1}{4}} = (0, 1]^{-\frac{1}{4}} = (0^{-\frac{1}{4}}, 1^{-\frac{1}{4}}] = (\frac{1}{0}, 1] = (+\infty, 1]$$

اول به توان $\frac{1}{4}$ رسانده
سیستم جبره منطقی به طرح می آوریم
هر عددی که تقسیم بر ۰ نمی شود
با ضابطه.

۳۸- تابع باضابطه $F(n) = \sqrt{10 \log \frac{n^2 + 2n}{n-1}}$ بدون باره امتداد

$$n = 0 \xrightarrow{\text{گزینه ۲}} \sqrt{10 \log \frac{0}{-1}} = \sqrt{10 \log 0} \quad \times \quad \text{عدد حقیقی نگردد، پس منطقی نیست}$$

نمی تواند باشد.

$$n = 1 \xrightarrow{\text{گزینه ۳}} \sqrt{10 \log \frac{1^2 + 2(1)}{1-1}} = \sqrt{10 \log \frac{3}{0}} = \sqrt{10 \log 1} \quad \checkmark$$

$$n = 3 \xrightarrow{\text{گزینه ۴}} y = \sqrt{10 \log 10} = \sqrt{\text{عدد مثبت}} \quad \checkmark$$

$f(x) = \sqrt{\log \frac{x+1}{x-1}}$
 $x = -1 \rightarrow \sqrt{\log \frac{x(-1)+1}{x-1}} = \sqrt{\log \frac{0}{-2}}$
 (0) $\times$

$$q = r \xrightarrow{F_{\text{min}}} \sqrt{\log \frac{r(r^*) + \Delta}{r - (r^*)}} = \sqrt{\log \frac{1K}{EI}} \quad (\otimes) \text{ } \rightarrow \text{مقدار بحرانی}$$

$\alpha = 0 \rightarrow \sqrt{\log \frac{r(\cdot) + \delta}{r(\cdot)}} = \sqrt{\log \frac{r}{r}} = \sqrt{\log 1} = 0$

۴- تابع $f(x) = \log(x-1)$ را با تابع $f(x)$ رسم کنید

$$n = r \rightarrow \log(r - r) \quad (\times) \quad \text{b.c.}$$

$x = -r \xrightarrow{\text{put in}} \log(-r-r) \quad (X) \quad \text{bki}$

۴۴- بدر تابع باضابطه

$$F(n) = ([n+1] - n)$$

$$F(x) = ([x+1] - x)^{\frac{1}{x}} \quad \underbrace{[x+1] - x = m} \rightarrow (m)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{m^x} \quad y = \frac{1}{x^m}$$

$$m \in [0, 1)$$

$$\frac{1}{m^*} \in [+\infty \quad 1) \Rightarrow R = [1 \quad +\infty)$$

برابر تمام باز است $y = \frac{e^m - e^{-m}}{e^m + e^{-m}}$ (بد تابع حصی)

$$y = \frac{e^{mx} - e^{-mx}}{e^{mx} + e^{-mx}} \left(x \frac{e^{mx}}{e^{mx}} \right) \Rightarrow \frac{e^{mx} - 1}{e^{mx} + 1} \xrightarrow{e^{mx} = m} \frac{m-1}{m+1}$$

$$m \in (-\infty, +\infty)$$

$$\frac{m-1}{m+1} \in (-1$$

○ $F(+\infty) = \frac{m}{m} = 1$



۴۴- تابع $f(x) = \sqrt{1 - (\ln x)^2}$ دامنه است

$$f(x) = \sqrt{1 - (\ln x)^2} \Rightarrow x = e \Rightarrow \sqrt{1 - (\ln e)^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0$$

$$\frac{1}{e} \xrightarrow{\text{نیمه ۳}} y = \sqrt{1 - (\ln \frac{1}{e})^2} = \sqrt{1 - (-1)^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0 \quad (\times)$$

$$x = \frac{1}{e} \xrightarrow{\text{نیمه ۲ و ۳}} \sqrt{1 - (\ln \frac{1}{e})^2} = \sqrt{1 - (\ln e)^2} = \sqrt{1 - (1)^2} = \sqrt{1 - 1} = \sqrt{0} = 0$$

۴۵- اگر $f(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشند بد تابع $g \circ f$ دامنه است

$$g(f(x)) = \sqrt{(2^{-x}) - 1} \xrightarrow{x^2 = m} \sqrt{(2^{-m}) - 1}$$

$$m \in [-1, +\infty)$$

$$(2^{-m}) - 1 \in [-1, +\infty)$$

۴۶- بد تابع $\log(\sin^2 x)$ دامنه است $\log^0 = -\infty$ $\log^1 =$

$$\log(\sin^2 x) \xrightarrow{\sin^2 x = m} \log(m)$$

$$m \in [0, 1]$$

$$\log(m) \in (-\infty, 0]$$

باید بدانش هر عددی که در بازه $[0, 1]$ می باشد
حداکثر $\log$ (بین $-\infty$ تا 0) قرار می گیرد.

ترکیب تابع *

$$\log(0) = -\infty \quad \log(1) = 0$$

ترکیب تابع: ترکیب f و g را بدینا $\log_{(m)}$ می خوانند و بدینا $\log$

$$\log(x) = f(g(x))$$

تعریف می کنیم

مثال: ترتیب تابع $F(x) = x^2 - 2x$ و $g(x) = 2x + 1$ را بیابید.

$$F(g(x)) = (g(x))^2 - 2(g(x)) = (2x+1)^2 - 2(2x+1)$$

$$g(F(x)) = 2(F(x)) + 1 = 2(x^2 - 2x) + 1$$

$$F(F(x)) = (F(x))^2 - 2(F(x)) = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x)$$

$$F(x^2 - 1) = (x^2 + 1)^2 - 2(x^2 + 1) =$$

$$g(x^2 + 1) = 2(x^2 + 1) + 1 =$$

مثال: اگر $F(x) = \frac{x}{x+1}$ و $g(x) = \sqrt{x+1}$ باشد آنگاه $F \circ g(3)$ را بیابید.

$$F \circ g(3) = \frac{(\sqrt{3+1})}{(\sqrt{3+1}) + 1} = \frac{\sqrt{4+1}}{\sqrt{4+1} + 1} = \frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$$

$\downarrow$
 $g(3) = \sqrt{3+1} = 2$

با استفاده از $F(F(-x^2))$ بیابید

$$F(x) = \begin{cases} -2 & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

$$F(-x^2) = (-x^2)^2 + 1 = x^4 + 1$$

حالا $F(F(-x^2)) = F(x^4 + 1) = -2$

مثال: اگر $F(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = x^2$ و $h(x) = \sqrt{x}$ باشد آنگاه

$$F \circ h \circ g(x)$$

نکته بسیار مهم: $\sqrt{x^2} = |x|$ می باشد.

$$h(g(f(x)))$$

$$g(f(x)) = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}$$

$$h(g(f(x))) = h\left(\frac{1}{x^2}\right) = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{|x|}$$

مثال: اگر $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$ و $g = \{(1,3), (2,4), (3,5)\}$ باشد.

$g \circ f$ کدام است؟
 $f = \{(1,2), (2,3), (3,4)\}$

$$g \circ f = \{(1,4), (2,5)\}$$

توضیح: تابع های بیرونی اعداد اول را انتخاب می کنیم و تابع های درونی اعداد دوم را انتخاب می کنیم.

به تابع های برابر را به هم وصل می کنیم و بقیه را حذف می کنیم.

بسیار کردن دامنه و برد ترکیب

الف) دامنه ترکیب، تشکیل داده بدون کوچکترین سازه کردن دامنه را می باید.

ب) برد ترکیب، تشکیل داده و سازه کنیم سپس برد را می باید.

مثال ۳: (نمود سوال) اگر $f(x) = \sqrt{2-x}$ و $g(x) = \sqrt{2-x^2-x}$ باشد دامنه

تابع $f \circ g$ کدام بازه است؟

$$D_{\text{gof}} \quad g(f(x)) = \sqrt{2 - (\sqrt{2} - x)^2} - (\sqrt{2} - x)$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{گزینه ۱}} y = \sqrt{2 - 0} - (\sqrt{2} - 2) = \sqrt{2} \quad \checkmark$$

$$x=0 \xrightarrow{\text{گزینه ۲}} y = \sqrt{2 - (\sqrt{2})^2} - \sqrt{2} = \sqrt{2 - 2} - \sqrt{2} = -\sqrt{2} \quad (X)$$

در زیر اعداد صحیح مثبت m و n دلیلی که $m^2 - n^2$ یک عدد صحیح است.

سوال ۳۸ (تفاوت سوال) اگر $F(x) = \sqrt{2 - 10 \log x}$ و $g(x) = x^2 - 21x$ باشد

دامنه تابع $F \circ g$ کدام است؟ $F(g(x)) = \sqrt{2 - 10 \log(x^2 - 21x)}$

$$x=0 \xrightarrow{\text{گزینه ۲}} \sqrt{2 - 10 \log(-21 \cdot 0)} = \sqrt{2 - 10 \log(0)} \quad (X)$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{گزینه ۴}} y = \sqrt{2 - 10 \log(2^2 - 21 \cdot 2)} = \sqrt{2 - 10 \log(-40)} \quad (X)$$

$$x=-2 \xrightarrow{\text{گزینه ۳}} y = \sqrt{2 - 10 \log((-2)^2 - 21(-2))} = \sqrt{2 - 10 \log(44)} \quad \checkmark$$

$$\sqrt{2 - 10 \log 1} = \sqrt{2 - 0} = \sqrt{2}$$

سوال ۴۱ (تفاوت سوال) اگر $F(x) = \log_2(x - x^2)$ و $g(x) = \sqrt{x+3}$ باشد دامنه تابع

$D_{\text{gof}} \quad g(f(x)) = \sqrt{\log_2(x - x^2)} + 3$ گوف نام است

$\sqrt{2} = 1.4$ ① $[\frac{x-1.4}{2}, \frac{x+1.4}{2}] = [-0.4, 1.4]$ (notice)

① $[-0.4, 1.4]$ ② $[-0.3, 1.7]$ ③ $[-1, 1.9]$ ④ $[0.1, 1.5]$

$x = -0.1 \rightarrow y = \sqrt{\frac{10 \log(0.1 - 0.1)}{2}} + 3$ (X)

$x = 0.15 \rightarrow y = \sqrt{\frac{10 \log(0.15 - 0.225)}{2}} + 3 + 10 \log^{\frac{1}{2}}$

توضیح: چون $10 \log^{\frac{1}{2}}$ بیشتر از $10 \log(0.15 - 0.225)$ است پس جواب زیر را یکال محبت می شود

پس این جواب درست است. نکته: ۲ جابجی ساده کردن نداریم یعنی تابع

تابع و بی برستی. برد ترکیب تابع *

سؤال ۳۴ (نزد سوال ۱) اگر $F(x) = 2^{-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-1}$ باشند، برد

تابع $g \circ f$ کدام است؟ $g(f(x)) = \sqrt{2^{-x^2} - 1} \xrightarrow{x^2 = m} y = \sqrt{2^{-m} - 1}$

$m \in [0, +\infty)$

$R = \sqrt{2^{-[-0, +\infty)} - 1} = \sqrt{2^{(-\infty, 0]} - 1} = \sqrt{(2^{-\infty}, 2^0]} - 1 = \sqrt{(0, 1]} - 1$

$\sqrt{(-1, 0]} = \{0\}$

$2^{+\infty} = +\infty$
 $2^{-\infty} = 0$

سؤال ۳۴ (نزد سوال ۱) اگر $F(x) = x - [x]$ و $g(x) = 2^{-x}$ باشند، برد تابع $g \circ f$

$g \circ f = g(F(x)) = 2^{-(x - [x])} \xrightarrow{x - [x] = m} 2^{-m}$

$m \in [0, 1)$

$R = 2^{-[-0, 1)} = 2^{(-1, 0]} = [2^{-1}, 2^0] = [\frac{1}{2}, 1]$

سوال ۱۷ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = 2\sin x - \sin 2x$ و $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ باشد

و مقدار $g(F(\frac{\pi}{4}))$ کدام است؟
 $g(F(\frac{\pi}{4})) = g(0.14) = \frac{1-0.14}{1+0.14} = \frac{0.86}{1.14} = \frac{4}{114} = \frac{2}{57}$

$F(\frac{\pi}{4}) = 2\sin\frac{\pi}{4} - \sin 2(\frac{\pi}{4}) = 2\sin 45^\circ - \sin 90^\circ = \sqrt{2} - 1 = 0.414$

سوال ۱۸ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = 2^{-x}$ و $g(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ باشد، باید تابع

$F(g(x)) = 2^{-\sqrt{x^2 - 2x}} \xrightarrow{x^2 = m} 2^{-\sqrt{m - 2x}}$

$m \in [0, +\infty)$

سوال ۱۹ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = 2^{|1-x|}$ و $g(x) = \sqrt{x - x^2}$ باشد، تابع

$g(F(x)) = \sqrt{2^{|1-x|} - (2^{|1-x|})^2}$

در نقاط انتهای حلقه $x=0 \rightarrow \sqrt{2^1 - (2^1)^2} = \sqrt{2-4}$ (X)

$x=-1 \rightarrow \sqrt{2^{1-1} - (2^{1-1})^2} = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$

$x=3 \rightarrow \sqrt{2^{1-3} - (2^{1-3})^2} = \sqrt{2^{-2} - 2^{-4}} = \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{3}{16}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

سوال ۲۰ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = x - [x]$ و $g(x) = 2^x$ باشد، تابع

$g(F(x)) = 2^{x-[x]} \xrightarrow{x-[x]=m} 2^m$

$2^{[0, 1)} = [2^0, 2^1) = [1, 2)$

سؤال ۲۱ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = -x + [x]$ و $g(x) = 2^x$ باشد تابع $g \circ f$ را بیابید

$$g(F(x)) = 2^{-x+[x]} \xrightarrow{-x+[x]=m} 2^m$$

$$m \in [0, 1) \rightarrow [2^0, 2^1) = [1, 2)$$

سؤال ۲۲ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = e^{-x^2}$ و $g(x) = 1 + [x]$ باشد تابع $g \circ f$ را بیابید

$$g(F(x)) = 1 + [e^{-x^2}] \xrightarrow{y = 1 + [e^{-x^2}]} y = 1 + [e^{-x^2}]$$

$$R = 1 + [-e^{-\infty}, +\infty) = 1 + [-e^{-\infty}, 0] =$$

$$1 + [(\frac{1}{e^\infty}, 1]) = 1 + [\frac{1}{e^\infty}, 1] = \{ \cdot \}$$

سؤال ۲۳ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$ و $g(x) = \arccos(2x-1)$ باشد تابع $g \circ f$ را بیابید

$$g(F(x)) = \arccos(2(\frac{x^2}{1+x^2}) - 1) \Rightarrow (\frac{2x^2}{1+x^2} - 1)$$

$$x=2 \xrightarrow{\text{نشان ده}} \arccos(\frac{2}{5} - 1) = \frac{3}{5} \quad \checkmark \text{ عدد حلقه AVC بین ۱ و ۱- است}$$

$$x=-1 \xrightarrow{\text{نشان ده}} \arccos(\frac{+2}{1} - 1) = 0 \quad \checkmark$$

سؤال ۲۴ (ترکیب تابع) اگر $F(x) = \sqrt{4x-x^2}$ و $g(x) = 2^{x-2}$ باشد تابع $g \circ f$ را بیابید

$$g(F(x)) = 2^{\sqrt{4x-x^2}-2}$$

$$4x-x^2 \xrightarrow{x=m} y = 4m-m^2 \Rightarrow y' = 4-2m = 0 \Rightarrow m=2$$

$$m \in (-\infty, 2, +\infty)$$

$$y = 4m-m^2 \in (-\infty, 4, -\infty) \rightarrow R = (-\infty, 4]$$

$\vec{r} = (-1, 0) = [-1, 0] = \left[-\frac{1}{r}, 1\right]$
 $f(x) = \tan^2 x$ و $g(x) = \frac{1-x}{1+x}$ باشد. آنگاه برد تابع $f \circ g$ کدام است؟
 (سؤال ۳۲) (برد تابع)

برد تابع $f \circ g$ را بیابید.
 $f(x) = \begin{cases} 2x & x \geq 0 \\ x+5 & x < 0 \end{cases}$

کدام است؟
 $f(x^2 + x + 1) - f\left(-\frac{1}{x}x^2 - 1\right)$
 $2 - (x^2 + x + 1) - (2(-\frac{1}{x}x^2 - 1) + 5)$
 $(-x^2 - x - 1 + 2) + x^2 - 2 = -x - 2$

۳- اگر $f(x) = 3x + 1$ و $g(x) = \frac{4}{x} - \frac{1}{x^2}$ باشد برد تابع $f \circ g$ کدام است؟
 هرگاه x داخل قدر مطلق 1 باشد و x خارج قدر مطلق باشد تابع را روی شش قدر مطلق قدر مطلق تشکیل کند.

$|1-x| = |x|$
 روش اول: نشانه هم: ضرایب x داخل قدر مطلق منفی بود داخل، اگر نه کمتر یا بیشتر از صفر.
 اگر ضرایب x داخل قدر مطلق مثبت باشد آنگاه $\rightarrow$ قدر مطلق (مربع می شود) $\rightarrow$ ریشه داخل x
 قدر مطلق (مربع می شود) $\rightarrow$ ریشه داخل x



۳۲- اگر $F(x) = x + [x]$ و $g(x) = \log_2(1 - 2x + [2x])$ باشد، بردار $g \circ f$ را بیابید.

$$g(f(x)) = \log_2(1 - 2x + [2x]) \xrightarrow{x + [x] = m} \log_2(1 - 2m)$$

$$m \in (-1, 0] \Rightarrow R = \log_2(1 - 2(-1, 0]) = \log_2(1 - (-2, 0]) =$$

$$\log_2(4, 1] \xrightarrow{\text{مربع}} \log_2(4, 1) = [\log_2 4, \log_2 1] = [2, 0]$$

۳۵- اگر $F(x) = 2x + [-2x]$ و $g(x) = \log_2(1 - x)$ باشد، بردار $g \circ f$ را بیابید.

$$g(f(x)) = \log_2(1 - 2x + [-2x]) \xrightarrow{2x + [-2x] = m} \log_2(1 - m)$$

$$m \in (-1, 0] \Rightarrow \log_2(1 - (-1, 0]) = \log_2(2, 1] = [1, 0]$$

۳۹- اگر $F(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ و $g(x) = \log_2 x$ باشد، نمودار تابع $F \circ g$ در کدام نقاط با منحنی $y = x^2 - x$ مشترک هستند؟

$$F(g(x)) = 2^{\frac{1}{\log_2 x}} = 2^{\log_2 x} = x$$

$$x = x^2 - x \Rightarrow x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ یا } x = 2$$

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (X) } \notin D \text{ یا } x = 2 \checkmark$$

۴۰- اگر $F(x) = \frac{x}{1 - x^2}$ و $g(x) = e^{2x-1}$ باشد، کدام باره بردار $g \circ f$ است؟

$$g(f(x)) = e^{2(\frac{x}{1-x^2})-1} \xrightarrow{2(\frac{x}{1-x^2})-1 = m} m^{-1}$$

$$m \in (0, +\infty) = (0, \infty)$$



$$f(n) = \begin{cases} 4n + n = 5n & n \gg \\ 4n - n = 3n & n < \end{cases}$$

$$g(n) = \begin{cases} \frac{1}{4}n - \frac{1}{4}n = \frac{1}{4}n & n \gg \\ \frac{1}{4}n + \frac{1}{4}n = \frac{1}{2}n & n < \end{cases}$$

$$n \gg: f(n) = 4n, g(n) = \frac{1}{4}n$$

$$f \circ g = f\left(\frac{1}{4}n\right) = 2n$$

$$n <: f(n) = 3n, g(n) = n$$

$$f \circ g = 3(n) = 3n$$

مطالب مهم

۲ نوع سوال در ترکیب تابع داریم:

- ۱) نوع اول: f می خوانند و f می دهند.
- ۲) نوع دوم: f می خوانند و f نمی دهند.

نوع اول: ۱) دور تمام n هایی تابع دارد شده، ابعاد دایره مشخص کنید.

۲) مقاطع دستگاهی دایره را داریم.

۳) باید داخل بدانند [دوره شروع تبدیل بدانند] ضامنه شروع شود.

نوع دوم: ۱) یک ترکیب را خودتان تشکیل دهید.

۲) ترکیب خودتان را با ترکیب صورت سوال برابر قرار دهید.



مثال: اگر $F \circ g(x) = 2x - 1$ و $g(x) = x + 4$ باشد:

مطلوبه: $F(x)$ محاسب کنید. $F(g(x)) = 2x - 1$

$$F(x+4) = 2x - 1 \Rightarrow x+4 = x \rightsquigarrow x = x-4$$

$$F(x) = 2(x-4) - 1$$

مثال: اگر $F(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$ و $F \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ باشد مقدار $g(1)$ بیابید

$$f(g) = \frac{g+1}{g-1}$$

(۱) درجه اول یک $F \circ g$ خودمان تشکیل می دهیم

(۲) ترکیب مردمان را با ترکیب سوال برابر قرار می دهیم

$$\frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1} \quad x=1 \rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{(1)^2+2}{(1)^2+1}$$

$$\frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2} \rightarrow 2g(1) - 2 = 3g(1) + 2 \Rightarrow g(1) = -4$$

مثال: اگر $F(x) = \frac{x}{x-3}$ باشد آنگاه $F'(x)$ محاسب کنید

$$2x-1 = x \rightsquigarrow x = \frac{x+1}{2}$$

$$F(x) = \frac{x+1}{\frac{x+1}{2} - 3}$$

مثال: اگر $F(x) = x^2 - 4x + 5$ باشد آنگاه $F(1-x)$ محاسب کنید

$$x-3 = 1-x \Rightarrow x = 4-x$$

$$F(1-x) = (4-x)^2 - 4(4-x) + 5$$

مثال: اگر $F(x) = x^2(2-x)^2$ باشد حاصل $F(1+x) - F(1-x)$ کدام است؟

$$x = 1+x \quad F(1+x) = (1+x)^2(2-(1+x))^2$$

$$x = 1-x \quad F(1-x) = (1-x)^2(2-(1-x))^2$$

مثال: اگر $F(x-1) = x^2 + \Delta$ باشد آنگاه $F(3)$ کدام است؟

$$2x-1=3 \Rightarrow x = \frac{4}{2} = 2$$

$$F(3) = (2)^2 + \Delta = 4$$

مثال: اگر $x \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow 2x$ حقیقی و $F(x) = 3x + 4$ باشد آنگاه $g(x)$ کدام است؟

$$f(g(x)) = 2x$$

$$F(g) = 3g(x) + 4$$

$$3g(x) + 4 = 2x \xrightarrow{x=\Delta} 3g(\Delta) + 4 = 2(\Delta) \Rightarrow g(\Delta) = \underline{2}$$

مثال: اگر $x \rightarrow g \rightarrow f \rightarrow x^2 - 1$ باشد و $g(x) = 2x - 1$ باشد آنگاه $F(3)$ کدام است؟

$$F(g(x)) = x^2 - 1$$

$$F(2x-1) = x^2 - 1 \rightsquigarrow 2x-1=3 \rightsquigarrow x = \underline{2}$$

$$F(2(2)-1) = (2)^2 - 1 \Rightarrow F(3) = \underline{3}$$

مثال: اگر $F(x+2) = x^2 + 2x$ باشد آنگاه $F(x-2)$ کدام است؟

$$x+2 = x-2 \Rightarrow x = \underline{x-4}$$



مثال: اگر $F(x + \frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2$ باشد، $F(x)$ را بیابید.

نقشه: چنانچه x بسیار بزرگ باشد x محاسبه نشود باید داخل بیابید F را در x و $\frac{1}{x}$ قرار دهید.

$$x + \frac{1}{x} = x$$

بسیار از آنجا که باید یاد داشت باشیم:

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$$

$$F(x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x})^2 - 2$$

$$F(x) = x^2 - 2$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2x \cdot \frac{1}{x} = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2$$

مثال: اگر $F(x - \frac{1}{x}) = x^3 - \frac{1}{x^3}$ باشد، $F(x)$ را بیابید.

$$F(x - \frac{1}{x}) = (x - \frac{1}{x})^3 + 3(x - \frac{1}{x})$$

$$F(x) = (x)^3 + 3(x) = 14$$

$$x^3 - \frac{1}{x^3} - 3x \cdot \frac{1}{x} (x - \frac{1}{x}) - 3(x - \frac{1}{x})$$



$$x=2$$

$$\begin{cases} \frac{F(2)+2F(-2)}{a} = \Delta \\ F(-2)-2F(2) = \Delta \end{cases}$$

$$x=-2$$

$$\begin{cases} F(2)+2F(-2) = \Delta \\ F(-2)-2F(2) = \Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b = \Delta \\ b-2a = \Delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} a+2b = \Delta \\ b-2a = \Delta \end{cases} \xrightarrow{\times 2} \begin{cases} a+2b = \Delta \\ -2b+4a = -2\Delta \end{cases}$$

$$5a = -\Delta \rightarrow a = -\frac{\Delta}{5}$$

مثال: اگر $F(x) = 9F(x-2) + F(x-1)$ باشد و $F(-1)=1$ ، $F(2)=2$ ، $F(4)=20$ ، $F(7)=17$ باشد.

$$x=4 \rightarrow F(4) = 9F(2) + F(3)$$

$$x=3 \rightarrow F(3) = 9F(1) + F(2) = 10$$

$$F(4) = 9F(2) + 10 = 20$$

تابع زوج و فرد

- تابع f ، از زوج نوع همگانه اولاً و دوماً متقارن باشد. ثانیاً $F(-x) = F(x)$ باشد.

$\cos(x)$ تابع ثابت و $\sin(x)$ تابع زوج می باشند.

تابع فرد: تابع f ، از فرد نوع همگانه اولاً و دوماً متقارن باشد. ثانیاً $F(-x) = -F(x)$ باشد.

$$F(-x) + F(x) = 0$$

نکته: محور تقارن تابع زوج، محور y ها (خط $x=0$) است.

محور تقارن تابع فرد، مبدأ مختصات می باشد.

نکته ۱: هر تابع دلخواه $f(x)$ با داشتن مختارین، می توان بصورت مجموع یک تابع زوج و یک تابع فرد نوشت.

$$f(x) = \underbrace{\frac{f(x) + f(x)}{2}}_{\text{زوج}} + \underbrace{\frac{f(x) - f(-x)}{2}}_{\text{فرد}}$$

تذکره: جمع ۲ عبارت مزدوج تابع زوج می باشد و تفاضل ۲ عبارت مزدوج تابع فرد می باشد.

روش سرآوردن زوج یا فرد بودن تابع:

۱) عدد مرتبه به تابع بدهید و اگر حاصل زوج باشد تابع زوج است و اگر فرد باشد تابع فرد است.

۲) اگر x را برابر با ۱ یا -۱ بگذارید و اگر حاصل زوج باشد تابع زوج است و اگر فرد باشد تابع فرد است.

فرد زوج و نه فرد است. (اگر جزء صحیح داشته باشد عدد اعشاری به هم)

مثال: زوج یا فرد بودن توابع زیر را بررسی کنید.

جمع ۲ عبارت مزدوج تابع زوج می شود.

$$1) f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^2}$$

تابع زوج است.

$$2) y = \log \frac{x^2}{1+x^2} \quad \begin{matrix} x=1 \rightarrow y = \log \frac{1}{2} \\ x=-1 \rightarrow y = \log \frac{1}{2} \end{matrix}$$

تابع فرد است.

$$3) y = \log \frac{x+1}{x-1} \Rightarrow \log(x+1) - \log(x-1)$$

تابع فرد است.

$$4) f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & x > 1 \\ x^2-2 & x < 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=2 \rightarrow y=-2 \\ x=-2 \rightarrow y=2 \end{matrix}$$

تابع زوج است و در $y = 4^x$

$$5) f(x) = x[x] \begin{cases} x = -1.5 \\ x = 1.5 \end{cases}$$

مثال: در حاصلی ۱ تا ۳ کدام تابع زوج است؟ $[-1, 3]$

۴) $y = x^2 + 1$ ۳) $y = x^3 - 1$ ۱) $y = \cos x$

سوال اول این بود که دامنه معکول باشد پس معکول معین دامنه معکول نیست.

مثال شماره (۲)

$$y = \frac{4^x + 1}{4^x} = \frac{4^x}{4^x} + \frac{1}{4^x} = 1 + 4^{-x}$$

مثال شماره (۳) نکته: وقتی می‌گویند نسبت به مبدأ مختصات قرینه است یعنی تابع فرد است.

$a = \pm \sqrt{4}$

$$f(x) = \log(x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

نمای تابع فرد است که ضرب در دافل برابر ضرب x بیرون باشد.

مثال شماره (۱۳) تابع فرد نسبت به مبدأ مختصات قرینه است.

حال قرینه ای نسبت به مبدأ مختصات چه می‌شود؟ خط فرض می‌شود.

مثال شماره (۱۰)

$$f(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} + \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

زوج فرد

زوج $= \frac{f(3) + f(-3)}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{1\sqrt{3}}}{2}$ $f(x) = x^2 - x + 1$

← بجای x عدد ۳ قرار می‌دهیم.

مثال شماره (۱۹)

$$f(x) = \log(\pm ax + \sqrt{a^2 x^2 + 1})$$

صفتاً باید قرینه قرینه باشد

تابع فرد باشد

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{a-x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{a-x} & x < 0 \end{cases} \quad y = \begin{cases} y=2 & x \geq -1 \\ y=-\sqrt{-a} & x < -1 \end{cases}$$

$$\sqrt{-a} = -2 \rightarrow \sqrt{-a} = 2$$

$$\rightarrow -a = 4 \rightarrow a = -4$$

مثال شماره ۱۸

$$\arctan \sqrt{x^2-1} + \arcsin (x^2-2x+1)$$

$$x=0 \rightarrow \arctan 0 + \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$$

تابع یک به یک :

$$f(a) = f(b) \rightarrow a = b$$

نکته : هر خط افقی از نموداری واحد است و یک نقطه قطع کند تابع یک به یک است.

نکته : اگر تابع زوج باشد یا متقارن از تابع زوج باشد ، تابع یک به یک نیست.

نکته : تابعی که همواره صعودی باشد (مشتق همواره مثبت) یا تابعی که همواره نزولی باشد (مشتق همواره منفی)

تابع یک به یک است.

نکته : چنانچه یک a داخل قدامت و یک b یا عبارت خارج قدامت باشد ، باید قدامت را از روی

ریشه و داخل قدامت تفکیک کنند.

روش تفکیک ۱۱ اگر ضریب a داخل قدامت باشد داخل ، اگر ضریب b یا ضریب a مثبت باشد

$$|1-x| = |x-1|$$

۲) رسم دوال در مطلق را بنویسید.

رسم $x > 0$ خود در مطلق
رسم $x < 0$ خود در مطلق

مثال: تابع $f(x) = \frac{|x+4| - |x| - 4}{x}$ در کدام بازه یک به یک است.

۱) $(0, \infty)$ ۲) $(-\infty, 0)$

رسم دوال مساوی صفر قرار می دهیم.

رسم $x=0$ و $x=-4$

$f(x) = \frac{|x+4| - |x| - 4}{x}$

$f(x) = \begin{cases} \frac{(x+4) - (x) - 4}{x} & x > 0 \\ \frac{(x+4) - (-x) - 4}{x} & -4 \leq x \leq 0 \\ \frac{(-x-4) - (-x) - 4}{x} & x < -4 \end{cases}$

$f(x) = \begin{cases} 0 & x > 0 \\ -4 & -4 \leq x \leq 0 \\ -\frac{4}{x} & x < -4 \end{cases}$

نکته: $x=0$ و $x=-4$ را با دایره بسته می کشیم.

مطلوبه تابع f^{-1} را بنویسید. (موضوع کردن نام اول در ضابطه درست)

مطلوبه تابع f را بنویسید. (موضوع کردن نام اول در ضابطه درست)

مطلوبه تابع f را بنویسید. (موضوع کردن نام اول در ضابطه درست)

مطلوبه تابع f را بنویسید. (موضوع کردن نام اول در ضابطه درست)

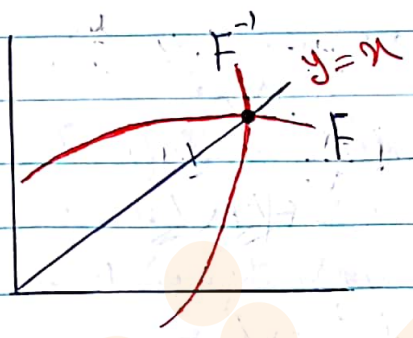
(شرط معکوس پذیری آن است که y در D باشد.)

$$\begin{cases} D_F = D_{F^{-1}} \\ R_F = D_{F^{-1}} \end{cases} \quad \begin{cases} (F \circ F^{-1})_x = x \\ (F^{-1} \circ F)_x = x \end{cases}$$

نکته:

$$(F \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ F^{-1}$$

نکته: تابع F و F^{-1} نسبت به هم نسبت به نیمه‌تقاطع ربع اول و سوم (خط $y=x$ متناظر هستند).
 پس برای پیدا کردن محل برخورد F و F^{-1} کافیست محل برخورد F و خط $y=x$ را بیابید.



مثال: اگر $x > 1$ $F(x) = x^2 - 2x + 4$ باشد آنگاه $F^{-1}(x)$ کدام است؟

پایه و نکته: معادله مرتبه منفرجه $x > 1$ $F(x) = x^2 - 2x + 4$ نسبت به نیمه‌تقاطع ربع اول و سوم کدام است؟

نکته: هر وقت تحت معادله مرتبه نسبت به نیمه‌تقاطع ربع اول و سوم یعنی معکوس می‌خواهد.
 هر وقت تحت معادله مرتبه نسبت به تقاطع یعنی مرتبه می‌خواهد.

۱) $y = 1 + \sqrt{x-3}$ $x=4 \rightarrow y = 2$ ✓

۲) $y = 1 + \sqrt{x+3}$ $x=4 \rightarrow y = 1 + \sqrt{7}$ (X)

۳) $y = 1 + \sqrt{x-3}$ $x=4 \rightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (X)

$$۴) y = -1 + \sqrt{x-3} \xrightarrow{x=3} y=0 \quad (X)$$

مقدم اول: بجای تابع x جای می نذاریم.

$$F(x) = x^2 - 2x + 4 \quad x > 1$$

$$\rightarrow x = y^2 - 2y + 4 \quad y > 1 \xrightarrow{y=2} x=4$$

مثال: در تابع $x > 0$ $F(x) = \frac{x^2-1}{2x}$ در $(0, \infty)$ معکوسش را پیدا کنید.

$$۱) 2x - \sqrt{4x^2+1} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} y = \frac{7}{4} - \sqrt{\frac{100}{16}} = \frac{7}{4} - \frac{5}{2} = -\frac{3}{4} \quad (X)$$

$$۲) 2x + \sqrt{4x^2+1} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} y = \frac{7}{4} + \frac{5}{2} = \frac{17}{4} \quad \checkmark$$

$$۳) 2x + 2\sqrt{x^2+1} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} y = \frac{7}{4} + 2\sqrt{\frac{13}{16}} \quad (X) \quad \text{از زیر رادیکال بیرون نذارید}$$

$$۴) 2x + \sqrt{x^2+1} \xrightarrow{x=\frac{3}{4}} y = \frac{7}{4} + \sqrt{\frac{13}{16}} \quad (X)$$

$$F(x) = \frac{x^2-1}{2x} \quad x > 0$$

$$\rightarrow x = \frac{y^2-1}{2y} \quad y > 0 \rightarrow 2x = \frac{y^2-1}{2y} \quad y > 0 \rightarrow (A)$$

$$(A) \xrightarrow{y=2} 2x = \frac{3}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{4}$$

$$F(x) = x + \sqrt{2x}$$

مثال: ضابطه معکوس این تابع کدام است؟

$$۱) x+1-\sqrt{2x+1} \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad (X)$$

توجه: چون زیر رادیکال باید مثبت شود پس

$$۲) x+1+\sqrt{2x+1} \quad x \geq -\frac{1}{2} \quad (X)$$

برای جمع آخر مثبت می شود پس گزینه اولانی تواند

باشد چون مساوی $\frac{1}{2}$ است.

$$۳) x+1+\sqrt{2x+1}$$

$$x > 0 \xrightarrow{x=4} y=8 \quad (X)$$

$$۴) x+1-\sqrt{2x+1}$$

$$x > 0 \xrightarrow{x=4} y=2 \quad \checkmark$$

$$F(x) = x + \sqrt{2x}$$

$$\rightarrow x = y + \sqrt{2y} \xrightarrow{y=2} x=4$$

مثال: نمودار معکوس تابع $x > 1$ خط $y = x^3$ با دامنه طولی قطع می‌کند.

$$y = x^3 - 2x + 3 \xrightarrow{\text{معکوس}} x = y^3 - 2y + 3 \quad y > 1$$

$$\begin{cases} x = y^3 - 2y + 3 \\ y = x - 3 \end{cases} \rightarrow y = (y^3 - 2y + 3) - 3$$

$$y^3 - 2y = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} y(y-2)(y+2) = 0 \rightarrow y = 0 \text{ یا } 2 \text{ یا } -2$$

$$y = 2 \xrightarrow{y = x - 3} x = 5$$

مثال: اگر $x > 1$ باشد نمودارهای F و F^{-1} با دامنه طولی متقاطع اند.

پسینا دین: اگر $x > 1$ باشد $F(x) = x^3 - 3x$ و $F^{-1}(x) = x^3 - 3x$ نیز با دامنه طولی و رسم را با دامنه طولی

قطع می‌کند.
 (نمودارهای F و F^{-1} در $x=0$ و $x=2$ و $x=-2$ در دامنه طولی قرار می‌دهیم.)

$$\begin{cases} y = x^3 - 3x \\ x = y^3 - 3y \end{cases} \rightarrow x^3 - 3x = x$$

$$x^3 - 4x = 0 \xrightarrow{\text{فاکتور}} x(x^2 - 4) = 0$$

$$x(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = 0 \text{ یا } 2 \text{ یا } -2 \xrightarrow{\text{سبب}} x = 2$$

نکته مهم: اگر سوال گفت نمودار معکوس تابع با دامنه طولی قطع می‌کند باید معکوس را حساب کنیم و بی

نکته: F و F^{-1} با دامنه طولی قطع می‌کند باید خود F را با $x=0$ و $x=2$ در دامنه طولی قرار دهیم.

مثال: با توجه به این که $x \rightarrow f \rightarrow g \rightarrow x$ باشد، $f(x) = 2x - 1$ باشد، $g(0)$ را بیابید.

کدام است؟ g و f زمانی که f را برعکس می‌کنیم، g را برعکس می‌کنیم. $g(f(x)) = x$

$$g = f^{-1} \quad g(0) = f^{-1}(0) \xrightarrow{x=2y-1} 0 = 2y - 1 \Rightarrow y = \frac{1}{2}$$

از اینجا می‌توانیم g و f را برعکس کنیم و پس مقادیر یکدیگر را بدست می‌دهیم.

مثال: ضرایب وارون تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -\sqrt{x} & x < 0 \end{cases}$ کدام است؟

۱) $-x^2 \xrightarrow{x=-3} y=-9$ (✓) $x=3 \rightarrow y=-9$ (✗)

۲) $x^2 \xrightarrow{x=3} y=9$ (✗) $x=-3 \rightarrow y=9$ (✗)

۳) $x|x| \xrightarrow{x=3} y=-9$ (✓) $x=3 \rightarrow y=9$ (✓)

۴) $-x|x| \xrightarrow{x=3} y=9$ (✗) $x=-3 \rightarrow y=9$ (✗)

مقادیر اول: $x = \begin{cases} \sqrt{y} & y \geq 0 \\ -\sqrt{y} & y < 0 \end{cases}$ $y \geq 0 \xrightarrow{y=9} x=3$ $y < 0 \xrightarrow{y=-9} x=-3$

اول با این امتحان می‌کنیم، در نتیجه سوال بالا را نیز می‌توانیم با این امتحان می‌کنیم و نتیجه را بدست می‌آوریم.

مثال: در تابع $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ با این فرض که $a+d=0$ و $\frac{b}{c} \neq 0$ باشد، (یعنی)

$f(x) = f^{-1}(x)$ می‌باشد. $\neq 0$ و $\neq 0$

$$f(x) = \frac{2x-2}{x-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x-2}{x-2}$$

$$f(x) = f^{-1}(x)$$

مثال: معکوس تابع $f(x) = 2^x - \left(\frac{1}{2}\right)^x$ بصورت $f^{-1}(x) = \log_2 u$ می باشد. u را بیابید.

1) $\frac{1}{2} (x + \sqrt{x^2 + 4}) \xrightarrow{x=0} u = 1 \xrightarrow{u = \log_2^4} y = \log_2^1 = 0$ (✓)

2) $\frac{1}{2} (x - \sqrt{x^2 + 4}) \xrightarrow{x=0} u = -1 \xrightarrow{u = \log_2^4} y = \log_2^(-1)$ (✗)

3) $x + \sqrt{x^2 + 4} \xrightarrow{x=0} u = 2 \xrightarrow{u = \log_2^4} y = \log_2^2 = 1$ (✗)

4) $x - \sqrt{x^2 + 4} \xrightarrow{x=0} u = -2 \xrightarrow{u = \log_2^4} y = \log_2^(-2)$ (✗)

$x = 2^y - \left(\frac{1}{2}\right)^y \xrightarrow{y=0} x = 0$

(مهم)

توابع جابجی برعکس:

$f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\sinh(x)$

$f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\cosh(x)$

$f(x) = \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $\tanh(x)$

$f(x) = \coth(x) = \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$ $\coth(x)$

$f^{-1}(x) = \sinh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $\sinh^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = \cosh^{-1}(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ $\cosh^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = \tanh^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}$ $\tanh^{-1}(x)$

$f^{-1}(x) = \coth^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{x+1}{x-1}$ $\coth^{-1}(x)$

الضابطه معلوس تابع $f(x) = \frac{1}{x}(10^x - 10^{-x})$ بصورت $f^{-1}(x) = \log 4$ باشد. $f^{-1}(x)$ را بیابید.

$$f(x) = \frac{1}{x}(10^x - 10^{-x}) \leadsto f^{-1}(x) = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

الضابطه معلوس تابع $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ باشد. $f^{-1}(\ln 3)$ را بیابید.

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \quad f^{-1} = (\ln 3)$$

$$\leadsto x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1}) \leadsto \ln 3 = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$$

$$\leadsto 3 = y + \sqrt{y^2 + 1}$$

$$y = \frac{r}{r} \leadsto r = \frac{r}{r} + \sqrt{\frac{q}{r} + \frac{r}{r}} \leadsto r = \frac{r}{r} + \frac{\sqrt{1r}}{r} \quad (\times)$$

$$y = \frac{r}{r} \leadsto r = \frac{r}{r} + \sqrt{\frac{r}{q} + \frac{q}{q}} \Rightarrow r = \frac{r}{r} + \frac{\sqrt{1r}}{r} \quad (\times)$$

$$y = \frac{r}{r} \leadsto r = \frac{r}{r} + \sqrt{\frac{1r}{q} + \frac{q}{q}} \Rightarrow r = \frac{r}{r} + \frac{1}{r} = \frac{q}{r} = r \quad (\checkmark)$$

$$y = \frac{r}{r} \leadsto r = \frac{r}{r} + \sqrt{\frac{q}{1r} + \frac{1r}{1r}} \Rightarrow r = \frac{r}{r} + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} = r \quad (\times)$$

$$f^{-1}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad x = \ln r \leadsto \frac{e^{\ln r} - e^{-\ln r}}{2} = \frac{r - e^{\ln r^{-1}}}{2} \leadsto$$

$$\leadsto \frac{r - \frac{1}{r}}{2} = \left(\frac{\frac{1}{r}}{2} = \frac{1}{4} = \frac{r}{r} \right) \quad (\checkmark)$$

* سؤال مرتبط با تابع معلوس *

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad f^{-1}(g(x)) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$g(x) = \frac{2(3)+1}{3-1} = \frac{7}{2} = 3.5$$



$$F(x) = r(x + \sqrt{x^2 - r^2})$$

$$\rightarrow x = ry + \sqrt{y^2 - r^2} \Rightarrow \Delta = ry + \sqrt{y^2 - r^2}$$

1) $r \sim y=r \rightarrow \Delta = r(r) + \sqrt{r^2 - r^2} = r^2 \quad (\times)$

2) $r^2 \sim y=r^2 \rightarrow \Delta = r(r^2) + \sqrt{r^4 - r^2} = r^3 + \sqrt{r^2} \quad (\times)$

3) $\frac{r}{r} \sim y=\frac{r}{r} \rightarrow \Delta = r\left(\frac{r}{r}\right) + \sqrt{\frac{r^2}{r} - \frac{r}{r}} = \frac{r}{r} + \sqrt{\frac{r}{r}} \quad (\times)$

4) $\frac{q}{r} \sim y=\frac{q}{r} \rightarrow \Delta = r\left(\frac{q}{r}\right) + \sqrt{\frac{q}{r} - \frac{r}{r}} = \frac{rq}{r} + \sqrt{\frac{q-r}{r}} = \frac{rq}{r} + \frac{\sqrt{q-r}}{\sqrt{r}} = \frac{rq + \sqrt{r(q-r)}}{r} = \Delta \quad (\checkmark)$

19) رابطه معکوس تابع $F(x) = r \arcsin \sqrt{1-x^2}$; $-1 \leq x \leq 1$ است.

$$F(x) = r \arcsin \sqrt{1-x^2} \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\rightarrow x = r \arcsin \sqrt{1-y^2} \quad -1 \leq y \leq 1 \quad y=\frac{1}{r} \rightarrow x = r \arcsin \sqrt{1-\frac{1}{r^2}} = r \arcsin \frac{\sqrt{r^2-1}}{r} = r \arcsin \frac{\sqrt{r^2-1}}{r}$$

1) $\sin \frac{x}{r} = \frac{r \cdot \frac{1}{r}}{r} = \sin 7^\circ = \frac{\sqrt{r}}{r} \quad (\times)$

2) $\cos \frac{x}{r} = \frac{r \cdot \frac{1}{r}}{r} = \cos 7^\circ = \frac{1}{r} \quad \checkmark$

3) $\cos^2 \frac{x}{r} = \cos^2 7^\circ = \left(\frac{1}{r}\right)^2 = \frac{1}{r^2} \quad (\times)$

4) $\sin^2 \frac{x}{r} = \sin^2 7^\circ = \left(\frac{\sqrt{r}}{r}\right)^2 = \frac{r}{r^2} \quad (\times)$

20) رابطه معکوس تابع $y = \frac{re^x + 1}{e^x - r}$ در صورت $u = \frac{re^x + 1}{e^x - r}$ است.

1) $\frac{re^x - 1}{e^x + r} \sim x = \frac{r}{r} \rightarrow u = \frac{-11}{1} = -11 \rightarrow y = \ln u \rightarrow y = \ln(-11) \quad (\times)$

$$1) \frac{x-2}{3x+1} \xrightarrow{x=-\frac{1}{3}} \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{2}{3}} \Rightarrow u=1 \xrightarrow{y=\ln u} y=\ln(1)=0 \quad (\checkmark)$$

$$2) \frac{3x+1}{x-2} \xrightarrow{x=-\frac{1}{3}} \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{7}{3}} \Rightarrow u=1 \xrightarrow{y=\ln u} y=\ln(1)=0 \quad (\checkmark)$$

$$3) \frac{x-2}{3x-1} \xrightarrow{x=-\frac{1}{3}} \frac{-\frac{7}{3}}{-\frac{11}{3}} \Rightarrow u=\frac{-14}{-22}=\frac{7}{11} \xrightarrow{y=\ln \frac{7}{11}} \quad (\times)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{4e^x + 1}{e^x - 3} \\ \rightarrow x = \frac{4e^y + 1}{e^y - 3} \xrightarrow{y=0} x = -\frac{4}{3} \end{array} \right.$$

$$\text{جواب} = y = \ln 2 \rightarrow x = \frac{4e^{\ln 2} + 1}{e^{\ln 2} - 3} = \frac{8+1}{2-3} = -\frac{9}{1} = -9$$

$$2) \text{ جواب} \rightarrow x = -\frac{9}{1} \Rightarrow u = \frac{-4}{-14} = u = \frac{2}{7} \rightarrow y = \ln \frac{2}{7} \quad (\times)$$

$$3) \text{ جواب} \rightarrow x = -\frac{9}{1} \Rightarrow u = \frac{-14}{-4} = u = \frac{7}{2} \rightarrow y = \ln \frac{7}{2} \quad (\checkmark)$$

$$f(x) \text{ و } f'(x) \text{ را حساب کنید. } f(x) = 2x + \frac{1}{x} \sqrt{x}$$

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x} \sqrt{x}$$

$$\rightarrow (x) = 2y + \frac{1}{y} \sqrt{y} \rightarrow \Delta_0 = 2y + \frac{1}{y} \sqrt{y}$$

$$1) y=2 \rightarrow \Delta_0 = 2(2) + \frac{1}{2} \sqrt{2} = 4 \quad (\times)$$

$$2) y=12 \rightarrow \Delta_0 = 2(12) + \frac{1}{12} \sqrt{12} = 24 + \frac{\sqrt{12}}{12} \quad (\times)$$

$$3) y=14 \rightarrow \Delta_0 = 2(14) + \frac{1}{14} \sqrt{14} = 28 + \frac{\sqrt{14}}{14} = 28 \quad (\checkmark)$$

$$4) y=34 \rightarrow \Delta_0 = 2(34) + \frac{1}{34} \sqrt{34} = 68 + \frac{\sqrt{34}}{34} = 68 \quad (\times)$$

۳۹- اگر $F(x) = \frac{x}{x-2}$ باشد، معکوس آن $F^{-1}(x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} F(x) = \frac{x}{x-2} & x > 2 \\ \rightarrow x = \frac{y}{y-2} & (y > 2) \quad y=3 \rightarrow x=3 \end{cases}$$

۱) $\frac{x-2}{x}$ $x < 0$ $\rightarrow$ جواب ندارد. $\textcircled{X}$

۲) $\frac{x+2}{x}$ $x > 0$ $\frac{x+2(F)}{F} = \frac{12}{F} = 3 \quad \textcircled{\checkmark}$

۳) $\frac{x}{x+2}$ $x > -2$ $\frac{F}{F+2(F)} = \frac{F}{12} = \frac{1}{3} \quad \textcircled{X}$

۴) $\frac{x}{x-2}$ $x < 2$ $\rightarrow$ جواب ندارد. $\textcircled{X}$

۴۰- اگر $F(x) = \sqrt{2x+1}$ باشد، معکوس آن $F^{-1}(x)$ را بیابید.

$$\begin{cases} F(x) = \sqrt{2x+1} \\ \rightarrow x = \frac{y^2-1}{2} \quad y > 0 \end{cases}$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad x=2 \rightarrow \Delta = F - F(1) \cdot (-1) = 1$$

$$x = \frac{2 + \sqrt{1}}{2} > 0 \quad \frac{2 + \sqrt{1}}{2} = 1 + \sqrt{1}$$

$$x = \frac{2 - \sqrt{1}}{2} < 0 \quad \text{چون مثبت است پس قابل قبول نیست.}$$

۴۱- تابع $F(x) = \frac{|x+4| - |x|-4}{x}$ در بازه $(-\infty, -1)$ معکوس آن $F^{-1}(x)$ را بیابید.

$$1) \frac{-1}{x} \quad -1 < x < 2 \quad x=1 \rightarrow y=-1$$

$$f) \frac{-1}{x} \quad \cdot \quad x < -f \quad \xrightarrow{x=1} y = -\frac{1}{x} \quad (X)$$

$$g) \frac{-1}{x} \quad -\infty < x < -f \quad (X)$$

$$h) \frac{-1}{x} \quad -\infty < x < -f \quad (X)$$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{(x+f)-(x)-f}{x} & x > 0 \\ \frac{(x+f)-(-x)-f}{x} & -f < x < 0 \\ \frac{(-x-f)-(-x)-f}{x} & x < -f \end{cases} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & (X) \\ 2 & (X) \\ -\frac{1}{x} & (\checkmark) \end{cases}$$

$$y = -\frac{1}{x} \quad \dots x < -f \quad \xrightarrow{y=-1} x = -\frac{1}{y} \quad \dots y < -f \quad \xrightarrow{y=-1} x = 1$$

در تمام حالت معکوس تابع است. $F(x) = \frac{ax-a}{bx-c}$
 برای همه تابع است!
 $1-c=0 \rightarrow c=1$

$$y' \neq 0 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -a \\ b & -c \end{vmatrix} = -c + ab \neq 0$$

$$ab \neq c \rightarrow ab \neq 1$$

۲ اصل است این سوال دارد. ۱) $1-c=0$ و ۲) $-c+ab \neq 0$ یعنی یکی معکوس و دیگری
 معکوس است حال اگر ضرایب را از هم جدا کنیم از روی ضرایب توان گزینیم است (این ضرایب) را (این ضرایب) را

۵۵) اگر $F(x) = \sqrt[3]{e^{2x}} - 1$ و $g(x) = e^{2x} + e^x$ باشد $g(F^{-1}(x))$ بدست آید.

$$F(x) = \sqrt[3]{e^{2x}} - 1$$

$$g(x) = e^{2x} + e^x = (e^x)^2 + e^x$$

$$g(F^{-1}(x)) = g(\ln x)$$

$$\rightarrow x = \sqrt[3]{e^{2y}} - 1 \xrightarrow{x=2} 2 = \sqrt[3]{e^{2y}} - 1$$

$$e^{2y} - 1 = 8 \rightarrow e^{2y} = 9 \rightarrow 2y = \log_e 9 = \ln 9$$

هر وقت در مسائل از سوال بماند حذف کنیم می توان آنرا حذف کرده و به طرف مساوی $\log$ اضافه کنیم.

$$y = \frac{1}{2} \ln 9 \rightarrow \ln(9)^{\frac{1}{2}} = \ln \sqrt{9} = \ln 3$$

و خود آن مانده ای که حذف کردیم را در عبارت قرار می دهیم.

$$g(\ln 3) = (e^{\ln 3})^2 + e^{\ln 3} = 12$$

۵۷- اگر $F(x) = 2^x$ و $g(x) = \sqrt{\sin^{-1} x}$ باشد، دامنه تابع $g \circ F^{-1}$ کدام بازه است؟

$$F(x) = 2^x \rightarrow x = \log_2 y \rightarrow y = 10^{\log_2 x}$$

$$g \circ F^{-1} = \sqrt{\text{Arcsin}(\log_2 x)} \rightarrow \text{عبارت جلوی } \log_2 \text{ را باید حذف کرد باشد}$$

سنگین او ۲ غلط است.

$$x=3 \xrightarrow{\text{نیزه}} y = \sqrt{\text{Arcsin}(\log_2 3)} \quad (X)$$

عبارت جلوی Arc باید عددی بین (۰- و ۱) باشد ولی الان بیشتر از (۱) شده است.

۵۸- تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x+1}$ معکوس است. نمودارهای دو تابع F و F^{-1} با یکدیگر صدق

مقابل می اندازند. (یعنی مقدار F نیمی از ربع اول و دوم، با یکدیگر صدق می کنند و با $x=y$ در یک دستگاه مساوی هم مقدار می دهیم.)

$$F(x) = 2 - \sqrt{x+1}$$

$$\begin{cases} y = 2 - \sqrt{x+1} \\ y = x \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(1)} x = 2 - \sqrt{x+1} \quad \text{در نداری کنیم}$$

$$\xrightarrow{(3)} -2 = 2 - \sqrt{x+1} \quad (✓)$$

$$1) \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

رابطه بنیادی:

$$2) \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$3) \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$4) \tan x + \cot x = 1$$

$$5) \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$6) 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$7) \csc x = \frac{1}{\sin x}$$

$$8) 1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$$

برای بهر جا:

$$\text{پس داریم } (\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x)$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= 2 \cos^2 x - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2 x \end{aligned}$$

$$\tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + x \right)$$

$$\frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - x \right)$$

فرمول های مشتق گیری:

$$\text{اولی} \times \text{مشتق دومی} + \text{دومی} \times \text{مشتق اولی} = \text{مشتق حاصل}$$

$$\text{صورت} \times \text{مشتق مخرج} - \text{مخرج} \times \text{مشتق صورت} = \text{مشتق کسری}$$

$$\left(\frac{y}{x} \right)' = \frac{x y' - y x'}{x^2}$$

یک کسره

$$y = \sin x \rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \rightarrow y' = -\sin x$$

عبارت صریح



$$y = \tan u \rightarrow y' = 1 + \tan^2 u$$

$$y = \cot u \rightarrow y' = -(1 + \cot^2 u)$$

$$y = e^u \rightarrow y' = e^u$$

$$y = \ln u \rightarrow y' = \frac{1}{u}$$

$$y = \sqrt{u} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{u}}$$

$$y = \sqrt[3]{u} \rightarrow y' = \frac{1}{3(\sqrt[3]{u})^2}$$

$$y = \text{Arc sin } u \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1 - (u)^2}}$$

$$y = \text{Arc cos } u \rightarrow y' = \frac{-1}{\sqrt{1 - (u)^2}}$$

$$y = \text{Arc tan } u \rightarrow y' = \frac{1}{1 + (u)^2}$$

$$y = \text{Arc cot } u \rightarrow y' = \frac{-1}{1 + (u)^2}$$

$$y = \int_a^u f(t) dt \rightarrow y' = f(u)$$

$$y = u^x \rightarrow y' = x u^{x-1}$$

$$y = u^x \rightarrow y' = x u^{x-1} \text{ (توان } \times \text{ Ln توان)}$$

$$y = \sin \sqrt{x^2 - 4x} \rightarrow y' = \cos \sqrt{x^2 - 4x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x}} \cdot (2x - 4)$$

$$y' = \cos \sqrt{x^2 - 4x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x^2 - 4x}} \cdot (2x - 4)$$

$$y = \sqrt{x} - \sqrt{x^2 + x} \rightarrow y' = (x + \frac{1}{2}) \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{x^2 + x}}$$

$$y = \ln(x^2 - 2x) \rightarrow y' = (2x - 2) \cdot \frac{1}{x^2 - 2x} = \frac{2x - 2}{x^2 - 2x}$$

$$y = \ln(x^2 - vx) \rightarrow y' = (2x^2 - v) \cdot \frac{1}{x^2 - vx} = \frac{2x^2 - v}{x^2 - vx}$$

$$y = \ln \ln(x^2 - 2x) \rightarrow y' = (2x - 2) \cdot \frac{1}{x^2 - 2x} \cdot \frac{1}{\ln(x^2 - 2x)}$$

$$y = \int_x^{\sqrt{x}} \sin t \, dt \rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sin \sqrt{x} - x \cdot \sin x$$

مسئله اولی به صورت $y = x^{\sin x}$ و مسئله دوم به صورت $y = x^{\sin x} \cdot \ln x$

$$y = x^{\sin x} \rightarrow y' = x^{\sin x} (\sin x \cdot \ln x)$$

$$y' = x^{\sin x} (\cos x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \sin x)$$

مثال: $f(x) = \sin 2x$ و $g(x) = \sqrt{x}$ در $x = \frac{\pi}{4}$ $\rightarrow$ $g \circ f = \sqrt{\sin 2x}$

$$g \circ f = \sqrt{\sin 2x} \rightarrow y' = \frac{2 \cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow y' = \frac{\cos \frac{\pi}{2}}{\sqrt{\sin \frac{\pi}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{2}}{\sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

مثال: $f(x) = \sin 2x$ و $g(x) = (1 + \cos 2x) \tan x$ در $x = \frac{\pi}{4}$

$$(1 + \cos 2x) \tan x = 2 \cos^2 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2 \sin x \cos x$$

$$y' = 2 (\sin x \cos x) = 2 \sin 2x \quad x = \frac{\pi}{4}$$

$$2 \sin 2x \left(\frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin \frac{\pi}{2} = 2 \left(\frac{1}{2} \right) = 1$$

مسئله: مشتق

$$\frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x} \quad \text{پس } \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x}$$

$$\frac{1 - \tan 2x}{1 + \tan 2x} = \tan\left(\frac{\pi}{4} - 2x\right)$$

$$y' = -2(1 + \tan^2(\frac{\pi}{4} - 2x)) \quad x = \frac{\pi}{4} \rightarrow y' = -2$$

مسئله: اگر $f(-1) = 2$ باشد مشتق $y = f(\frac{2}{x})$ در $x = -2$ چقدر می‌شود؟

$$y = f\left(\frac{2}{x}\right) \rightarrow y' = \left(\frac{0-2}{x^2}\right) \times f'\left(\frac{2}{x}\right) \quad x = -2 \rightarrow -\frac{1}{4} \cdot f'(-1) = -\frac{1}{4}$$

مشتق خارج در صورت - مشتق صورت در مخرج
توسط قانون ۲

مسئله: مشتق

$$y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} \quad \text{پس } x=2$$

نکته: $\ln$ خواص مشتق بسیار اول دارد و ساده‌ترین.

$$\frac{\ln A}{\ln B} = \ln A - \ln B \rightarrow y = \ln \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - \ln x \Rightarrow y' = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2+1} - \frac{1}{x} \quad x=2 \rightarrow$$

$$\frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{4-5}{10} = -\frac{1}{10}$$

مسئله: اگر $f(x) = x^2 + 2$ باشد و $g(x) = \sqrt{x-2}$ باشد. $f(g(x))$ را در $x=3$ مشتق کنید.

$$g'(x) \cdot f'(g(x)) = (f(g(x)))'$$

$$y = f(g(x)) \rightarrow y' = g'(x) \cdot f'(g(x))$$

① $f(g(x)) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x \rightarrow \text{مشتق} = 1$

$x-2+2 = x$



مثال: اگر $F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$ باشد. مشتق $F(x)$ در $x = \frac{3}{2}$ را بیابید.

نکته: در مشتق انتگرال، با dt خطی زنی. به از x و مشتق $F(x)$ بجای t قرار می دهیم.

$$F(x) = \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$$

$$y = \int_{x^3}^{\sqrt{x}} \frac{t dt}{1+t} \rightsquigarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{1+(\sqrt{x})^2} - 3x^2 \cdot \frac{x^3}{1+(x^3)^2}$$

مشتق $F(x)$ از ضرب و تقسیم می شود در $x=a$

حالت اول: حاصل صفر در نقطه صفر باشد. (حقاً از عمل ضرب و تقسیم مشتق بیاید).

$$y = \frac{(x^2-1)(x+1)}{\sqrt{x+x^2}} \quad x=1 \rightsquigarrow y = (x^2-1) \cdot \frac{(x+1)}{\sqrt{x+x^2}}$$

$$y' = 2x \cdot \frac{(x+1)}{\sqrt{x+x^2}} + (x^2-1) \cdot \frac{1}{\sqrt{x+x^2}} \quad x=1 \rightsquigarrow y' = 2x \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + 0$$

مثال: تابع g در a پیوسته است و $F(x) = (x-a)g(x)$ در $F(a)$ مشتق پذیر است.

$$F(x) = (x-a)g(x) \quad x=a$$

$$F'(x) = 1 \cdot g(x) \xrightarrow{x=a} F'(a) = g(a)$$

مثال: مشتق متباین $y = \frac{(x-2)^3(x^2-x-2)}{\sqrt[3]{4x+2}}$ در $x=2$ را بیابید.

نکته: وقتی در مشتق متباین $(x-2)$ در صورت داریم که $(x-2)^3$ در مخرج است.

$$y = \frac{(x-2)^3(x+1)(x-2)}{\sqrt[3]{4x+2}} \Rightarrow y = \frac{(x-2)^4(x+1)}{\sqrt[3]{4x+2}}$$

$$y^{(4)} = \frac{4(2+1)(x+1)}{\sqrt[3]{4x+2}} \xrightarrow{x=2} y^{(4)} = \frac{4}{\sqrt[3]{10}} \cdot 3$$

$24(x-2)$ مشتق معکوس
 24 مشتق معکوس

مشتق ضعیف در صورت

ب) عامل مشترک صورت و مخرج نباشد.

$y' = \frac{\text{توان}}{\text{برای توان ضعیف}} - \frac{\text{توان}}{\text{برای توان صورت}} + \frac{\text{توان}}{\text{توان}}$

مثال: مشتق تابع $y = \frac{(2x-1) \cdot \sqrt{5x-4}}{(x+4)^2 \cdot \sqrt{x+4}}$ در نقطه $x=2$ کدام است؟

$y' = \frac{(2x-1)' \cdot (\sqrt{5x-4})' - (2x-1) \cdot (\sqrt{5x-4})'}{(x+4)^2 \cdot (\sqrt{x+4})' - (x+4)^2 \cdot (\sqrt{x+4})''} + \frac{1}{(x+4)^2 \cdot (\sqrt{x+4})'}$

$y' = \frac{2 \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x-4}} - (2x-1) \cdot \frac{5}{2\sqrt{5x-4}}}{(x+4)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}} - (x+4)^2 \cdot \frac{1}{4\sqrt{x+4}}} + \frac{1}{(x+4)^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+4}}}$

انواع مشتق: مشتق ضعیف، مشتق قوی، مشتق ترکیبی

۱) مشتق ضعیف
 ۲) مشتق قوی
 ۳) مشتق ترکیبی

اگر ۱) معادله داشته باشیم مشتق ضعیف یا قوی است.

اگر ۲) معادله داشته باشیم مشتق ترکیبی یا قوی است.

اگر ۳) معادله داشته باشیم مشتق ترکیبی است.

جمع: به معادله ای که x و y با هم ضابطی باشند ضعیف می گویند.

$y = x^2 - 2x$

مشتق ضعیف

$\frac{\partial A}{\partial B} = A \cdot B$

$\frac{\partial A}{\partial B}$

در این مورد ضابطی مشتق ضعیف و وابسته (A) تک و تنها (برای توان و ضرب) در ضابطی با هم عبارت

صریح است و مشتق ضعیف است در غیر این صورت مشتق ضعیف است.

الف) نسبی: نسبت به متغیر مستقل خواسته نشه به صورت معمولی مشتق می گیریم.

ب) مختصی: روش اول: تمام متغیرها را به یک طرف مساوی منتقل کنید.

$$\frac{\partial A}{\partial B} = - \frac{\text{مشتق } B}{\text{مشتق } A}$$

روش دوم: بجای تمام یها (زبانی که می متغیر وابسته باشند) یعنی فقط x و y

وابسته باشند: ۱) بجای تمام یها u قرار دهیم

۲) مشتق گیری مستقیم انجام می دهیم (u فراموش نشه).

مثال: اگر $z = \frac{x^2 + y^2}{2xy}$ باشد $\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟ (مشتق نسبی)

چون $\frac{\partial z}{\partial x}$ از خواسته است و z در دست می پد و تنها و بدون ضرب است مشتق نسبی است.

$$z'_x = \frac{2x \times (2xy) - 2y \times (x^2 + y^2)}{(2xy)^2}$$

مثال: اگر $z^2 + 3xz + y^2 = \ln(x^2 - z)$ باشد $\frac{\partial z}{\partial x}$ کدام است؟

در سطح $(2, 6, 3, -3)$
 $x \quad y \quad z$

$$z^2 + 3xz + y^2 - \ln(x^2 - z) = 0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{2xz - \frac{2x}{x^2 - z}}{2z + 3x - \frac{1}{x^2 - z}}$$

مشتق زنجیری یا پارامتری:

می دانیم اگر ۲ متغیر وابسته مشتق زنجیری یا پارامتری است.

دومره $\frac{\partial A}{\partial B}$: اگر A و B هر دو وابسته به ۱ متغیر باشند مشتق پارامتری است.

و اگر یکی مستقل باشند و دیگری وابسته باشند مشتق زنجیری است.

روش مشتق گیری: (۱) از هر ۲ معادله مشتق بگیریم

(۲) اگر مشتق پارامتری بود به هم تقسیم کنیم

(۳) اگر مشتق زنجیری بود در هر ضربه مکینم
(زنجیری: دارد - ضربه: ندارد)

مثال: اگر $y = \sqrt{u^2 + u}$ باشد و $u = x^3 - 3x$ باشد y' را بیابید. در $n=2$ کدام است؟

(مشتق زنجیری)
 $y' = \frac{2u+1}{2\sqrt{u^2+u}} \xrightarrow{u=2} y' = \frac{5}{2\sqrt{4}}$
 (لا وابسته و مشتق)

$u = x^3 - 3x \Rightarrow x=2 \Rightarrow 3x^2 - 3 \Rightarrow 3(2)^2 - 3 = 12 - 3 = 9$

$y' = \frac{dy}{dx} \Rightarrow y' = \frac{5}{2\sqrt{4}} \cdot 9 = \frac{45}{4}$

مثال: اگر $y = \sqrt{x^2 + 14}$ و $u = \frac{x+2}{x-1}$ باشد $\frac{dy}{du}$ را بیابید. در $n=3$ کدام است؟

(مشتق پارامتری چون هم dy و هم du وابسته هستند)

$y' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+14}} \xrightarrow{x=3} y' = \frac{7}{10} = \frac{7}{10}$

$u = \frac{x+2}{x-1} \xrightarrow{x=3} u' = \frac{-1-2}{(x-1)^2} \xrightarrow{x=3} u' = -\frac{3}{4}$

$y = \frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\text{مشتق}} y' = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{(cx+d)^2}$

$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{7}{10}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{28}{15} = -\frac{28}{15}$

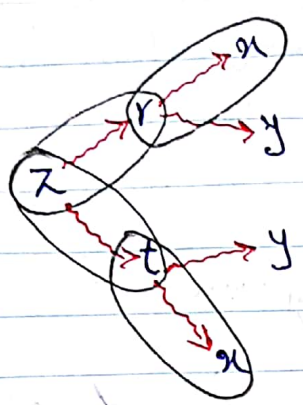
$\frac{dy}{du} = \frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{du}{dx}} = \frac{dy}{du}$

مشتق گیری زنجیری: (۱) در معادله اصلی نسبت به متغیر مشتق بگیریم

(۲) در معادلات فکری نسبت به متغیر خواسته شده مشتق بگیریم

۳) مشتق های متقاطع را در هم ضرب کنید.
 ۴) جواب ها را با هم جمع کنید.

مثال: اگر $z = rt - \frac{t}{r}$ و $t = 3xy^2 - x^2y$ باشد و $r = \sqrt{x - 3y}$ باشد



$\frac{\partial z}{\partial x}$ و $y=1$ و $x=4$ بدست آید!

$$z = rt - \frac{t}{r} \begin{cases} \rightarrow z'_t = rt - \frac{1}{r} \xrightarrow{r=1, t=-4} z'_t = 4 \\ \rightarrow z'_r = t - \frac{0-t}{r^2} \xrightarrow{r=1, t=-4} z'_r = 12 \end{cases}$$

$$t = 3xy^2 - x^2y \xrightarrow{y=1} t'_x = 3y^2 - 2xy \xrightarrow{x=4, y=1} t'_x = -5$$

$$r = \sqrt{x - 3y} \xrightarrow{y=1} r'_x = \frac{1}{2\sqrt{x}} \xrightarrow{x=4} r'_x = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4(-5) + 12\left(\frac{1}{4}\right) = -19$$

چون z وابسته به r است و r وابسته به x می باشد یعنی z وابسته به x می باشد پس می توانیم از روش زنجیره استفاده کنیم.

مثال: اگر $z = x^2 - y^2 + \frac{y}{x}$ و $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ باشد $r=2$ در $\frac{\partial z}{\partial r}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ کدام است! چنانچه در معادله زنجیره را در معادلات متقاطع استفاده می کنیم.

$$z = x^2 - y^2 + \frac{y}{x} \xrightarrow{\text{مشتق نسبی}} z = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta + \frac{r^2 \sin^2 \theta}{r \cos \theta}$$

$$z = r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta + r \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} \rightarrow z'_r = 2r \cos^2 \theta - 2r \sin^2 \theta + 1 \times \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta}$$

$$r=2, \theta=\frac{\pi}{3} \rightarrow z'_r = 4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) - 2(2) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}} \rightarrow z'_r = -\frac{1}{2}$$

مثال: اگر $y = r \sin \theta$ ، $x = r \cos \theta$ ، $w = r^2 \cos^2 \theta$ باشد، $\frac{\partial w}{\partial y}$ را بیابید.

$\cos^2 \theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta$

$w = r^2 \cos^2 \theta = r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$

$= r^2 \cos^2 \theta - r^2 \sin^2 \theta$

$\Rightarrow w = x^2 - y^2$

$\frac{\partial w}{\partial y} = -2y$

از w نسبت به y مشتق بگیرید.

مثال: اگر $y^2 = F(y - 2x)$ باشد، $F'(1) = -2$ باشد، مقدار $\frac{dy}{dx}$ در نقطه $x=1$ و $y=3$ را بیابید.

$y^2 - F(y - 2x) = 0$

$\frac{dy}{dx} = \frac{-(-2) \cdot F'(y - 2x)}{2y - F'(y - 2x)}$ $\xrightarrow{x=1, y=3} \frac{2F'(1)}{6 - F'(1)} = \frac{2(-2)}{6 - (-2)} = \frac{-4}{8} = -\frac{1}{2}$

مثال: اگر $x^3 + y^3 = 1$ باشد، $\frac{dy}{dx}$ را بیابید.

هر دو طرف را نسبت به x مشتق بگیرید. بجای y ، u می‌گذاریم.

$x^3 + u^3 = 1$

مشتق ضمیمه است $y \rightsquigarrow u$

$3x^2 + 3u^2 \cdot u' = 0 \Rightarrow u' = -\frac{x^2}{u^2}$

مثال: در تابع $y = xe^{-\frac{x^2}{4}}$ مقدار $\left(\frac{y}{x}\right)$ در نقطه $x = \frac{1}{4}$ را بیابید.

$\ln y = \ln x e^{-\frac{x^2}{4}} \Rightarrow \ln y = \ln x + \ln e^{-\frac{x^2}{4}}$

$\ln y = \ln x - \frac{x^2}{4} \xrightarrow{y=u} \ln u = \ln x - \frac{x^2}{4} \Rightarrow \frac{u'}{u} = \frac{1}{x} - \frac{x}{2}$

$$x = \frac{1}{y} \rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{3}{y^2}$$

مثال: مشتق تابع را بیابید.

$$y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} \quad \xrightarrow{\text{مکان ۲}}$$

$$y' = x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}} \quad y$$

$$y' = x + y \rightarrow y' - y - x = 0 \rightarrow y' = \frac{-1}{xy - 1}$$

مشتق دوم: (۱) مشتق اول را با استفاده از فرمول بیابید.

(۲) دگر مشتق مشتق دوم بنویسید.

$$y = x + e^{fx} \rightarrow x + e^{fx} - y = 0$$

مثال: مشتق را با مقابله حذو کنید.

$$\frac{d^2 x}{dy^2} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{-1}{1 + fe^{fx}} = \frac{1}{1 + fe^{fx}} \quad x = u$$

$$(0, 1) \quad u' = \frac{1}{1 + fe^{fx}} \rightarrow u'' = \frac{-1 \cdot u' \cdot e^{fx} \cdot f}{(1 + fe^{fx})^2} \quad u = 0 \rightarrow u' = \frac{1}{2}$$

$$u'' = \frac{-17}{8} = \frac{-42}{128} = \frac{-121}{100} = -1.21$$

برای حل مشتق های دوم وقتی مشتق مشتق (فریب مشتق) می توان تبدیل به پارامتری کرد.

مشتق دوم پارامتری بنویسید. در این حالت مشتق وابسته را حذف کنید.

$$y = x + e^{fx} \quad \begin{cases} x = t \\ y = t + e^{ft} \end{cases}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + fe^{ft}}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{1 + fe^{ft}}\right)}{1 + fe^{ft}} = \frac{-1 \cdot e^{ft} \cdot f}{(1 + fe^{ft})^2} \quad x = t = 0 \rightarrow \frac{-14}{128} = -1.21$$

مسئله دوم پارامتری: (۱) مشتق اول پارامتری را گرفته و شماره کنیم.

(۲) از ۲ در مخرج زیر جایگزین کنیم.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx}$$

مسئله: حساب ۴۹۶ در تابع پارامتری $\begin{cases} x = \ln(t+1) \\ y = \ln(t^2-1) \end{cases}$ در نقطه $x = \ln 2$ و $y = \ln 3$

$$\begin{cases} x = \ln(t+1) \rightarrow x'_t = \frac{1}{t+1} \\ y = \ln(t^2-1) \rightarrow y'_t = \frac{2t}{t^2-1} \end{cases}$$

$$x = \ln(t^2) \rightarrow x = \ln t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{2t}{t^2-1}}{\frac{1}{t+1}} = \frac{2t(t+1)}{(t^2-1)(t+1)} = \frac{2t}{t-1}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{2t}{t-1}\right)}{\frac{1}{t+1}} = \frac{\frac{2(t-1) - 2t}{(t-1)^2}}{\frac{1}{t+1}} = \frac{-2}{(t-1)^2} \xrightarrow{t=2} \frac{-2}{1} = -2$$

مسئله: $x = \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{1+t}}$ پس $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{\frac{dx}{dy}} = \frac{dy}{\frac{1}{2\sqrt{1+y}}} = 2\sqrt{1+y}$

$$x = \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{1+t}} \rightarrow \int_1^y \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = x \rightarrow x = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{1+y} \rightarrow y = u \rightarrow u' = \sqrt{1+u}$$

$$\text{مشتق} \rightarrow u'' = \frac{u'}{2\sqrt{1+u}} = \frac{\sqrt{1+u}}{2\sqrt{1+u}} = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{4} \rightarrow \frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \rightarrow y = x + \frac{1}{2} \sin 2x$$

$$\begin{cases} x=t \\ y=t+\frac{1}{t}=\sin^2 t \end{cases} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+\cos 2t}$$

$$\frac{d^2x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{1+\cos 2t}\right)}{1+\cos 2t}$$

$$t=\frac{\pi}{4}, \quad \frac{+2\sin 2t}{(1+\cos 2t)^2} \xrightarrow{t=\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1}$$

مثال: $x=\sqrt{t^2+1}$, $\frac{dt}{dy}$ سبب $u=x^2-3x$ و $y=\frac{u^2-3}{u+2}$

$$y=\frac{u^2-3}{u+2} \Rightarrow y'u = \frac{2u(u+2)-(u^2-3)}{(u+2)^2} \xrightarrow{u=0} y'u = \frac{3}{4}$$

$$u=x^2-3x \Rightarrow 2x-3 \xrightarrow{x=2} 2(2)-3 \Rightarrow u'x=1$$

$$\hookrightarrow (2^2-3(2))=u=0$$

$$x=\sqrt{t^2+1} \Rightarrow x'_t = \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \xrightarrow{t=2} \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow x'_t = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\hookrightarrow \sqrt{(2)^2+1} \Rightarrow \sqrt{5} = 2$$

$$y'u \cdot u'_x \cdot x'_t = y'_t \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{3}{5}$$

مثال: درگاه پلکان آن با محور y و محور x

$$\frac{dy}{dx} \text{ سبب } \begin{cases} x=(t+1)e^t \\ y=t^2 e^t \end{cases}$$

$$x=(t+1)e^t=0 \Rightarrow t=-1$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{t \cdot e^t + e^t \cdot t}{e^t + e^t(t+1)} \xrightarrow{\text{سبب}} \frac{t e^t (t+1)}{e^t (t+2)} = t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(t)}{e^t + e^t(t+1)} \xrightarrow{t=-1} \frac{1}{e^{-1} + e^{-1}(0)} = e$$

نکته ۹۶: در انتگرال‌گیری، برای انتگرال‌گیری تابع $C + \text{Arctan} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ تابع y

بر حسب x متغیر شده است. مقدار y را از $x=3$ و $y=1$ در C است.

$$C + \text{Arctan} \frac{y}{x} = \ln \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow C + \text{Arctan} \left(\frac{y}{x} \right) - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$$

$$y' = \ominus \frac{\frac{-y}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}}{\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} - \frac{1}{x} \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}} = \ominus \frac{\frac{-y}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}}{\frac{1}{x} \cdot \frac{x^2 + y^2}{x^2 + y^2} - \frac{y}{x^2 + y^2}} = \frac{y+x}{x^2 + y^2} = \frac{x+y}{x^2 + y^2}$$

$$\Rightarrow y = u \Rightarrow u' = \frac{x+u}{x-u} \Rightarrow u'' = \frac{(1+u')(x-u) - (1-u')(x+u)}{(x-u)^2} \xrightarrow[u'=2]{x=1} \frac{\Delta}{2}$$

نکته: تابع نسبت به تابع: (۱) از هر تابع مشتق کنید (۲) بر حسب x تقسیم کنید.

مثال: تابع $y = \sqrt{x^2 + 1}$ نسبت به x در $x=1$ در $\frac{\Delta}{2}$ است.

$$y = \sqrt{x^2 + 1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \xrightarrow{x=1} \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

مثال: اگر $y = x^2 + 9$ نسبت به y در $x=3$ در $\frac{\Delta}{2}$ است.

$$y = x^2 + 9 \Rightarrow \sqrt{y} = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$\frac{x}{x+1} \xrightarrow{x=3} \frac{3}{4} = \frac{\Delta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \begin{matrix} x & y \end{matrix}$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} \text{ با } v = x+y, u = x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$$

پس: $u = x + y$ $v = -x + y$ حاصل

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} = \frac{1}{2}$$

تابع همبند: تابع $F(x, y)$ از همبند n متغیر است.

$$F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y) \text{ است.}$$

پس: اگر تابع همبند n متغیر باشد، آنگاه $F(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n F(x, y)$ است.

مثال: $z = x e^{\frac{y}{x}} + y$ $z(\lambda x, \lambda y) = \lambda x e^{\frac{\lambda y}{\lambda x}} + \lambda y = \lambda (x e^{\frac{y}{x}} + y) = \lambda z$

$z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ $z(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda (x + y)} = \lambda \frac{x^2 + y^2}{x + y} = \lambda z$

$f(x, y) = \sin \frac{x}{y} + \cos \frac{x}{y}$ اگر f از همبند n متغیر باشد، آنگاه $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$ است.

$$f(\lambda x, \lambda y) = \sin \frac{\lambda x}{\lambda y} + \cos \frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda \left(\sin \frac{x}{y} + \cos \frac{x}{y} \right) = \lambda f(x, y)$$

$z = \ln \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ $z(\lambda x, \lambda y) = \ln \lambda \frac{x^2 + y^2}{x + y}$

$z = \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y}$ جمع و تفاضل چند تابع همبند از همبند n متغیر می‌شود.

$$z(\lambda x, \lambda y) = \lambda \frac{x^2}{y} - \lambda \frac{x}{y}$$

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$

اولیاد:

$$x \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = \lambda \cdot \text{توان} \cdot (\text{عبارت مرتبه})$$

$$x \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{باید} \quad Z = x^2 \arctan \frac{y}{x}$$

مثال: اگر

$$x \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} = r \cdot \left(x^2 \arctan \frac{y}{x} \right)$$

می شود

$$\frac{x=r}{y=1} \rightarrow r \cdot (F \cdot \text{ARC tan } 1) = r \pi$$

$$Z = \frac{x^2 + y^2}{x + y} \quad Z(\lambda x, \lambda y) = \frac{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2}{\lambda x + \lambda y} = \frac{\lambda^2 (x^2 + y^2)}{\lambda (x + y)} = \lambda \frac{(x^2 + y^2)}{(x + y)}$$

$$F(x, y) = \sin \frac{x}{y} + \cos \frac{x}{y}$$

اگر از اعداد صحیح و اعداد گویا به دست آید

$$F(\lambda x, \lambda y) = \sin \frac{\lambda x}{\lambda y} + \cos \frac{\lambda x}{\lambda y} = \lambda^0 \left(\sin \frac{x}{y} + \cos \frac{x}{y} \right)$$

$$Z = \ln \frac{x^2 + y^2}{x + y} \quad Z(\lambda x, \lambda y) = \ln \lambda^2 \frac{x^2 + y^2}{x + y}$$

$$Z = \frac{x^2}{y} - \frac{x}{y} \quad Z(\lambda x, \lambda y) = \lambda \frac{x^2}{y} - \lambda \frac{x}{y}$$

$$x \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial F}{\partial y} \quad \text{باید} \quad F(x, y) = (x^2 + y^2) \cdot \tan \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x + y}}$$

مثال: اگر

$$x \cdot \frac{\partial F}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial F}{\partial y} = r F$$

$$y=2, x=3 \quad x \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} \quad \text{باید} \quad Z = \frac{x^2}{y} - \frac{x^2 + y}{2x}$$

مثال: اگر

$$Z = \frac{x^2}{y} - \frac{x^2 + y}{2x} = \lambda^2 \frac{x^2}{y} - \lambda^2 \frac{x}{2x} - \lambda^0 \frac{y}{2x}$$

باید

$$x \cdot \frac{\partial Z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial Z}{\partial y} = 1 \left(\frac{x^2}{y} \right) - 1 \left(\frac{x}{2} \right) - 0 \left(\frac{y}{2x} \right)$$

۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵، ۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰، ۲۱، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۲۹، ۳۰، ۳۱، ۳۲، ۳۳، ۳۴، ۳۵، ۳۶، ۳۷، ۳۸، ۳۹، ۴۰، ۴۱، ۴۲، ۴۳، ۴۴، ۴۵، ۴۶، ۴۷، ۴۸، ۴۹، ۵۰، ۵۱، ۵۲، ۵۳، ۵۴، ۵۵، ۵۶، ۵۷، ۵۸، ۵۹، ۶۰، ۶۱، ۶۲، ۶۳، ۶۴، ۶۵، ۶۶، ۶۷، ۶۸، ۶۹، ۷۰، ۷۱، ۷۲، ۷۳، ۷۴، ۷۵، ۷۶، ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۰، ۸۱، ۸۲، ۸۳، ۸۴، ۸۵، ۸۶، ۸۷، ۸۸، ۸۹، ۹۰، ۹۱، ۹۲، ۹۳، ۹۴، ۹۵، ۹۶، ۹۷، ۹۸، ۹۹، ۱۰۰

پرسش: با استفاده از $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$ و $z = \frac{\log x - \log y}{x^2 - y^2}$ را بیابید.

$$z = \frac{\log x - \log y}{x^2 - y^2} = \frac{1}{x^2 - y^2} \log \frac{x}{y}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = az = -2z$$

پرسش: نمونه سوال 1 فصل (مستقیم)

$$x = uv$$

$$y = \frac{u+v}{u-v}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} v & u \\ -v & -u \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = J, \quad \frac{1}{J} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} y'_u &= \frac{1 \cdot (u-v) - 1 \cdot (u+v)}{(u-v)^2} = \frac{-2v}{(u-v)^2} \\ y'_v &= \frac{1 \cdot (u-v) - (-1) \cdot (u+v)}{(u-v)^2} = \frac{2u}{(u-v)^2} \end{aligned}$$

$$x = y^2 + y \Rightarrow 2y + 1 \Rightarrow 2(1) + 1 \Rightarrow x'_y = 3$$

$$\hookrightarrow (1)^2 + 1 = 2$$

$$u = (x^2 + y^2) \Rightarrow 2x + 2y \xrightarrow{x=2} 2(2) + 2 \Rightarrow u'_x = 6$$

$$u'_x \cdot x'_y = u'_y \Rightarrow \frac{du}{dy} = 1 \cdot x^2 = x^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = \frac{1}{x^2}$$

سوال 280: مستقیم، تغییر متغیر

$$z = x\sqrt{x-y} \Rightarrow z'_x = 1 \cdot \sqrt{x-y} + \frac{1}{2\sqrt{x-y}} \cdot x \xrightarrow{x=2} z'_x = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow z'_y = \frac{-1}{2\sqrt{x-y}} \xrightarrow{x=2, y=1} \frac{-1}{2\sqrt{1}} = z'_y = -\frac{1}{2}$$

$$y = \frac{r}{s} \Rightarrow y'_s = \frac{0-r}{s^2} \xrightarrow{r=2, s=-1} \frac{-2}{1} = -2$$

$$x = r^2 - rs \Rightarrow x'_s = -r \xrightarrow{r=2, s=-1} x'_s = 2$$

$$\frac{\partial z}{\partial s} = -\frac{1}{2}(-2) + \frac{5}{2} \cdot 2 = 11$$

$$y = (rx-1)^r \cdot \frac{\sqrt{(rx-1)(rx+1)}}{rx+1} = (rx-1)^r \cdot \frac{\sqrt{(rx-1)(rx+1)}}{rx+1} \quad (24)$$

$$(rx-1)^r \cdot \frac{(rx-1) \cdot (rx+1)^{\frac{1}{2}}}{rx+1} \Rightarrow (rx-1)^r \cdot \frac{(rx+1)^{\frac{1}{2}}}{rx+1}$$

$$e^{rx-z} - rx^2 + xy'' - 14 = 0 \quad (r, r, 1) \quad (25)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{e^{rx-z} - rx^2 + xy''}{-re^{rx-z} - rx} \xrightarrow[r=1]{\substack{x=1 \\ y=2}} \frac{e^{r-r} - r(1) + (r)^2}{-re^{r-r} - (r)^2} = \frac{1-r+r}{-r-r} = \frac{0}{-2r} = 0$$

$$y = x + \cos x \Rightarrow x + \cos x - y = 0 \quad (26)$$

$$\frac{dx}{dy} \rightarrow \frac{dx}{dy} = - \frac{-1}{1 - \sin x} = \frac{1}{1 - \sin x} \quad x=u$$

$$u' = \frac{1}{1 - \sin u} \xrightarrow{\text{Cot}} u'' = \frac{0 - \cos u}{(1 - \sin u)^2} \quad u = \frac{\pi}{4} \quad u' = r$$

$$u'' = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{1} = \sqrt{2}$$

$$u = \frac{x^r y^r - y^r}{x^r + y^r} \quad u(x, y) = \frac{x^r x^r y^r}{x^r x^r} - \frac{x^r y^r}{x^r y^r} = x \frac{x^r y^r}{x^r} - x \frac{y^r}{y^r} \quad (27)$$

$$z = x^r e^{-y} + \frac{x - ry}{x+y} \Rightarrow z = x^r x^r e^{-y} + x \frac{x}{x} - x \frac{-ry}{y} \quad (28)$$

$$r(x^r e^{-y}) + 0 \left(\frac{x}{x}\right) - 0 \left(\frac{-ry}{y}\right) =$$

$$z = x \operatorname{Arctan} \frac{y}{x} + \frac{x-ry}{x+y} \Rightarrow 1 \cdot (x \operatorname{Arctan} \frac{y}{x}) \quad (29)$$

$$\xrightarrow[r=-1]{x=1} 1 \cdot \left(r \operatorname{Arctan} \frac{r}{r} + \frac{r-r(-r)}{r-r} \right) = r \operatorname{Arctan} 1 = r - \operatorname{Arctan} 1$$

$$r \left(\frac{\pi}{4} \right) = - \frac{\pi}{4}$$

$$Z = \frac{x''}{y''} \ln \frac{y}{x} \Rightarrow \frac{x'' x''}{x' y''} \ln x \cdot \frac{y}{x} = \lambda \left(\frac{x''}{y''} \ln \frac{y}{x} \right) \quad \text{--- (1)}$$

$$Z = x\sqrt{y+xy} \Rightarrow x \cdot (y+xy)^{\frac{1}{2}} = x \cdot \frac{1}{2} (y+xy)$$

$$\lambda'x \cdot \frac{1}{F}(\lambda'y + \lambda'x\lambda'y) = \lambda'x \cdot \frac{1}{F}\lambda'(y + x y) = \lambda'\Delta \cdot \frac{1}{F}\lambda'(\underbrace{F + \Delta \cdot F}_{\gamma F}) = \Delta \cdot \frac{1}{F}\lambda'(\gamma F)$$

$$Z = x' + y' \rightarrow Z' = x' + y'$$

$$x = r + t \rightarrow x'_r = 1$$

$$y = r - vt \rightarrow y'_r = 1$$

$$\frac{\partial Z}{\partial r} = F(x) + r y \xrightarrow{y \text{ constant}} F \quad \frac{\partial^2 Z}{\partial r^2} = F'(r) + r(1) = 1 + r = 1$$

$$e^{z-x} + x^r y = f(x) \Rightarrow e^{z-x} + x^r y - f(x) = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \ominus \frac{-1 + 2xy - x}{xz} = \ominus \frac{-1 + 2(1)(x) - x}{x(-1)} = -\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \quad \begin{matrix} (1, x, -1) \\ x, y, z \end{matrix}$$

$$z^r - x e^{y r x} - r y^r = 0$$

$$\frac{dz}{dx} = \ominus \frac{-1e^{y-x}}{x^2} \Rightarrow \frac{-1e^{y-x}}{x(-x)} = \frac{-1(1)}{-4} = \boxed{\frac{1}{4}}$$

$$z' - x e^{xy-x} \cdot \frac{z}{y} = f$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{e^{y-x}}{x^2 - y} = -\frac{1}{x^2 - y} = -\frac{1}{1-1} = -\left(-\frac{1}{0}\right) = \frac{1}{0}$$

$$z = e^{\frac{y}{x}} + x^r y = \lambda e^{\frac{y}{x}} + \lambda^r x^r \cdot \lambda' y'$$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ r & y \end{pmatrix} \quad (24)$$

$$(\sqrt{e})^r + \lambda^r x^r \cdot \lambda' y' =$$

$$y = \frac{(r(x-1))^r \sqrt{rx+\delta}}{(x+1)^r \sqrt{x-1}} \rightsquigarrow \frac{r(r(x-1))^r \cdot \frac{r}{\sqrt{rx+\delta}}}{\delta(x+1)^r \cdot \frac{1}{r(\sqrt{x-1})^r}} \xrightarrow{x=r} \quad (25)$$

$$\frac{r(r(x-1))^r \frac{r}{\sqrt{rx+\delta}}}{\delta(x+1)^r \cdot \frac{1}{r(\sqrt{x-1})^r}} = \frac{r^2 \cdot \frac{1}{r}}{\delta(x+1) \cdot \frac{1}{r}} = \frac{1}{\delta x - 1}$$

$$xyZ + rZ^r - ry - 1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} x & y & Z \\ r & y & Z \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = - \frac{xyZ - r}{xy + rZ} = \frac{(r)(-r) - r}{(r)(1) + r(-r)} = \frac{-r}{r-1} = \frac{-r}{-4} = \frac{r}{4}$$

$$y = x + \frac{1}{r} \sin rx \rightsquigarrow x + \frac{1}{r} \sin rx - y = 0 \quad (27)$$

$$\frac{dx}{dy^r} \rightsquigarrow \frac{dx}{dy} = - \frac{1}{1 \cdot \frac{1}{r}(x \sin x \cdot \cos x)} \xrightarrow{x=u} - \frac{1}{1x(\sin u \cdot \cos u)} \xrightarrow{\text{Gauss}}$$

$$u'' = \frac{0 - \cos u - \sin u}{(\sin u \cdot \cos u)^r} \xrightarrow{u=\frac{\pi}{2}} \frac{-\frac{\sqrt{r}}{r} - \frac{1}{r}}{(\frac{1}{r} - \frac{\sqrt{r}}{r})^r}$$

$$Z = ye^{rx+y} + \frac{ry}{x^r} \quad (28)$$

$$\rightsquigarrow Z'_x = ye^{rx} + \frac{0 - rx \cdot ry}{(x^r)^r} \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=r}} 1 \cdot re^{r(1)} + \frac{0 - r(r) \cdot r(1)}{1} = 1 \cdot re^r + 1$$

$$\rightsquigarrow Z'_y = 1 \cdot e^y + \frac{rx^r - 0}{(x^r)^r} \xrightarrow{\substack{x=1 \\ y=r}} 1 \cdot e^r + \frac{r(1)^r}{1} = 1 \cdot e^r + r$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{1}{J} = \frac{1}{J}$$

$$u = x + y, \quad v = -x + y \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2 \quad (2 \times 1)$$

$$y = 0 \quad (2 \times 1)$$

$$x'' + 2xy + 2y' - 2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2x+2y}{-x+2y} \xrightarrow{x=u} \frac{2u+2y}{-u+2y} \rightarrow u' = \frac{2+2y}{-1+2y} \quad (2 \times 1)$$

$$u'' = \frac{0-0}{(2+2y)^2} \xrightarrow{u=1} u'=1$$

$$y = \sqrt{x} + \sqrt{x} + \sqrt{x} + \dots \xrightarrow{\text{COS}} y' = x + \sqrt{x+x+x} \quad (2 \times 1)$$

$$y' = x + y \Rightarrow y' - y = x = 0 \Rightarrow y' = \frac{-1}{2y-1} \xrightarrow{y=1} \frac{-1}{2(1)-1} = \frac{-1}{1} = -1 \quad (2 \times 1)$$

$$u = x + y' \Rightarrow u' = 2x + 2y$$

$$\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2x - 2y$$

$$v = x + y \Rightarrow v' = 1 + 1$$

$$(x-1)^y - y^{x+1} = 0 \quad (2 \times 1)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - xy^x}{y(x-1)^{x+1}} \xrightarrow{x=1} \frac{1 - 1(1)^1}{1((1)-1)^{1+1}} = \frac{1}{0}$$

$$y = \ln \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} \Rightarrow \ln \sqrt{x+1} - \ln \sqrt{x+1} =$$

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}} - \ln(\sqrt{x+1})^{\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^{\frac{1}{2}}} \xrightarrow{x=1} \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

(۲۵۲) اگر صورت سوالی Ln داشته باشیم جواب صریحی پیدا نمی‌کنیم

$$u = \ln x \cdot \frac{x+y}{x^2} \rightarrow e^u = \frac{x+y}{x^2} \rightarrow x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = -1 \cdot \frac{x^2}{e^u} = -1 \quad (1)$$

$$y = \sqrt{1-t^2} \rightarrow y' = \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}$$

(۲۵۱)

$$\sin u = \frac{x^2+y^2}{x+y} \rightarrow \frac{x^2 \cdot x+y^2}{x+y} \Rightarrow \frac{x^3+y^3}{x+y}$$

(۲۵۰)

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

(۱۷۴)

$$f'(x) \cdot g'(f(x)) = (g \circ f)'$$

$$g(f(x)) = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)^2}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{1+\frac{x^2}{1-x^2}}} = \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\sqrt{\frac{1}{1-x^2}}} = x \xrightarrow{\text{محدود}} 1$$

ارام

تذکره: چون تابع غیر حلقه باشد، معکوس تابع کلی را نسبت به یک متغیر ننویسند.

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \lambda \quad \text{(عبارت هموگنی \(\lambda\) توان \(\lambda\) مشتق معکوس)}$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad \text{با توجه به } z = \ln \frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy}} \quad \text{الگوریتم}$$

$$z = \ln \lambda \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy}} \right) \quad e^z = \left(\frac{x^2+y^2}{\sqrt{xy}} \right)$$

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1 \cdot e^z}{e^z} = 1$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \quad \text{با توجه به } u = \sin^{-1} \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \quad \text{مسئله ۲۵-}$$

$$u = \sin^{-1} \left(\frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} \right) \Rightarrow \sin u = \frac{x+y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\cos u} \sin u = \frac{1}{\cos u} \tan u \quad \left\{ \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2}} = \frac{\lambda}{\lambda^{\frac{1}{2}}} = \lambda^{\frac{1}{2}} \right\}$$

تذکره: چون تابع ۲ تابع حلقه و غیر حلقه، تقسیم ابتدا تابع را به دو بخش میزنند و حساب میکنند و در نهایت جواب را جمع میکنند.

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1 \quad \text{با توجه به } z = \ln(x^2+y^2) + \frac{x^2+y^2}{x-y} \quad \text{مسئله ۲۶-}$$

$$z = \underbrace{\ln(x^2+y^2)}_{z_1} + \underbrace{\frac{x^2+y^2}{x-y}}_{z_2} \quad \text{(۲ جزء جداگانه میزنند)}$$

$$z_1 = \ln(x^2+y^2)$$

$$x \frac{\partial z_2}{\partial x} + y \frac{\partial z_2}{\partial y} = 1 \cdot \frac{x^2+y^2}{x-y}$$

$$e^{z_1} = x^2+y^2$$

$$x \cdot \frac{\partial z_1}{\partial x} + y \frac{\partial z_1}{\partial y} = \frac{1(e^{z_1})}{e^{z_1}} = 1$$

$$x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 1 + \frac{x^2 + y^2}{x - y} \quad \begin{matrix} x=1 \\ y=2 \end{matrix} \rightarrow 1 + \frac{(1)^2 + (2)^2}{1-2} = 1 + \frac{1+4}{-1} = 1 - 5 = -4$$

تذکره: چنانچه مشتق تابع (صفتی) باشد از نقطه اولیه (مختصات) استفاده کرد.

مثال: اگر $z^2 - x^2 - y^2 + x y z = 0$ باشد $x \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial z}{\partial y}$ در نقطه

(۱، ۱، ۱) حتمی شود $\left(\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{-2x + yz}{2z + xy} \right) \cdot x \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} \rightarrow \frac{1}{3}$

$\left(\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{-2y + xz}{2z + xy} \right) \cdot y \Big|_{\substack{x=1 \\ y=1 \\ z=1}} \rightarrow \frac{1}{3}$

$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

مثال: اگر $z = x \cdot f(x^2 - y^2)$ باشد $y \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y}$

$\left(\frac{\partial z}{\partial x} = 1 \cdot f(x^2 - y^2) + 2xy \cdot f'(x^2 - y^2) \right) \cdot y$

$y \frac{\partial z}{\partial x} = y f(x^2 - y^2) + 2x^2 y f'(x^2 - y^2)$

$\left(\frac{\partial z}{\partial y} = -2xy \cdot f'(x^2 - y^2) \right) \cdot x$

$x \frac{\partial z}{\partial y} = -2x^2 y f'(x^2 - y^2)$

$y \frac{\partial z}{\partial x} + x \frac{\partial z}{\partial y} = y \cdot f(x^2 - y^2) = y \frac{z}{x}$

مثال: اگر $z = f(u, v)$ باشد و $u = \frac{x}{y}$ و $v = \frac{y}{x}$ باشد، $\frac{\partial z}{\partial x}$ را بیابید.

$$z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y} \cdot f'_1 + \frac{-y}{x^2} \cdot f'_2$$

(مشتق جزئی نسبت به x)

مثال: اگر $z = \frac{xy}{x+y}$ باشد، $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ را بیابید.

$$z = \frac{xy}{x+y} \rightarrow z'_y = \frac{x(x-y) - 1(xy)}{(x+y)^2} = \frac{x^2}{(x+y)^2}$$

از مشتق جزئی نسبت به y مشتق بگیرید.

$$z''_{xy} = \frac{2x(x+y)^{-2} - 2(x+y)^{-3} \cdot x}{(x+y)^2}$$

$$z = xy^2 - y \sin x \rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = y^2 - y \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = 2y - \cos x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} = y(2y - \cos x) - (y^2 - y \cos x)$$

$$= 2y^2 - y \cos x - y^2 + y \cos x = y^2 - y = \underline{\underline{y}}$$

$$y = te^{rt}$$

$$x = (t+r)e^t$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 \cdot e^{rt} + te^{rt} \cdot r}{1 \cdot e^t + e^t(t+r)} = \frac{e^{rt}(1+rt)}{e^t(r+t)} = e^{\frac{rt}{r+t}}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{e^{rt}(1+rt)}{e^t(r+t)} \right) = \frac{e^{rt} \left(\frac{rt+1}{t+r} \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{rt}}{e^t(r+t)} \right) \cdot e^t}{e^t(r+t)}$$



$$Z = \ln \left(r \frac{t^r}{u^r} + t + \frac{u^r}{t^r} \right)$$

$$y = (rx-1)^r \cdot \frac{\sqrt{rx-1}}{x+\sqrt{rx}} \Rightarrow y' = rx \cdot \frac{\sqrt{rx-1}}{x+\sqrt{rx}} \cdot \frac{1}{\sqrt{rx-1}} \cdot rx = rx \cdot \frac{r}{\sqrt{rx-1}} \cdot \frac{1}{\sqrt{rx-1}} = rx \cdot \frac{r}{rx-1}$$

$$F(x) = \int_1^{x^r} \frac{dt}{\sqrt{9+t^2}} \Rightarrow rx \cdot \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} \dots \Rightarrow \frac{rx}{\sqrt{9+x^2}} \xrightarrow{x=r} \frac{r}{r\sqrt{9}} \quad (16)$$

$$Z = (xy + x) \cdot e^{y - xy}$$

$$\frac{\partial Z}{\partial n} = z'_{n=1} \cdot e^{y-n} + -re^{y-n} \cdot (y+n) = -re^{y-n} + re^{y-n}$$

$$-r + F(\Delta)^r - r = \underline{\underline{14}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ x & y & z \end{pmatrix} \quad (x, y, z)$$

$$Z'_y \Rightarrow \frac{\partial Z}{\partial y} = \ominus \frac{-Zx + rym}{-ny} \Rightarrow \ominus \frac{-Zx + rym}{-ny} \Rightarrow \frac{-Zx + rym}{ny}$$

$$F'(x) = rx'' - x \quad \therefore y = f(x') \quad x = -1 \quad (214)$$

$$y = f(x') \Rightarrow y' = rx' f'(x') \Rightarrow y' = rx' f'(rx'' - x')$$

$$y' = r(-1) \cdot (r(-1) - 1) \Rightarrow -r \cdot (r(-1) - (-1)) = -r \times 1 = -r$$

$$z = \frac{x'' + y'}{x - y} \quad x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} \quad x = r, y = 1 \quad (215)$$

$$z = \frac{\lambda' x'' + \lambda' y'}{\lambda x - \lambda y} \Rightarrow \lambda \frac{x'' + y'}{x - y} \Rightarrow \lambda \frac{(r)' + (1)'}{r - 1} = \frac{1}{r} = \frac{\Delta}{r}$$

$$z = \frac{x'' + y'}{x'' - y'} \Rightarrow \frac{\lambda' x'' + \lambda' y'}{\lambda' x'' - \lambda' y'} \Rightarrow \lambda' \frac{x'' + y'}{x'' - y'} \Rightarrow \lambda' \frac{\Delta}{r} = 0 \quad (216)$$

$$F(x) = \frac{\cos^n x}{1 + \sin^n x} \Rightarrow \frac{-r \cos x \cdot \sin^n x (1 + \sin^n x) - r \sin x \cos^n x \cdot \cos^n x}{(1 + \sin^n x)^2} \quad (217)$$

$$\frac{-\sin^n x (1 + \sin^n x) - \sin^n x \cdot \cos^n x}{(1 + \sin^n x)^2} = F'\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{-1(1 + \frac{1}{r}) - 1(\frac{1}{r})}{(1 + \frac{1}{r})^2} = \frac{-\frac{r}{r}}{(\frac{r+1}{r})^2} = \frac{-\frac{r}{r}}{\frac{r^2 + 2r + 1}{r^2}} = \frac{-r}{r^2 + 2r + 1} = \frac{-r}{(r+1)^2}$$

$$r \frac{r}{(r+1)^2} = -\frac{1}{r} \quad F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{1}{r}}{\frac{r}{r}} = \frac{r}{r} = \frac{1}{r}$$

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{r} = \frac{2}{r} = \frac{r}{r} = 1$$

$$z - ze^{rx-y} + \frac{y-r}{x} = 0 \quad (1, r, -1) \quad (218)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{-re^{rx-y} + \frac{y-r}{x}}{rz - e^{rx-y}} = \frac{-re^{r(1)-r} + \frac{r-r}{(1)r}}{r(-1) - e^{r(1)-r}} = 0 \Rightarrow \frac{-r-r}{-r-1} = \frac{r}{r}$$

$$y = (rx-1)^r \sqrt{\Delta x'' + 1} \Rightarrow r \sqrt{\Delta \left(\frac{1}{r}\right)^2 + 1} = r \sqrt{\frac{\Delta}{r} + 1} = r \sqrt{\frac{\Delta}{r}} = r \sqrt{\frac{r}{r}} = r \quad (219)$$

$$(rx-1)^r \Rightarrow r(rx-1)^r = 4(rx-1)^r = 12(rx-1)^r = r(rx-1)^r = rx(rx-1)^r = rx(rx-1)^r$$

$$Z = (x+iy)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} + y \frac{\partial Z}{\partial y}$$

$$\left(x, \frac{\partial}{\partial y}\right) \left(x, \frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$Z = (\lambda x + i \lambda y) \sqrt{\lambda^2 x^2 + \lambda^2 y^2} = \lambda (x+iy) \cdot \lambda \sqrt{x^2+y^2} = (1, i) = 1$$

$$\left(1 + i \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot \sqrt{\left(1\right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2} = 1 \cdot \sqrt{1+1} = 1 + 1 = 2$$

مقادیر خطی خاص و خاصیت: می‌دانیم برای پیدا کردن معادلات خطی نیاز به برقراری

روش خطی: نسبت خطی خاص برای هر نقطه ثابت می‌باشد.

نسبت خطی خاص برای هر نقطه ثابت می‌باشد (هم‌قارن هم‌دور) نسبت می‌باشد.

$$\text{نسبت: } (y-b) = (x-a) \text{ مستقیم}$$

$$\text{نسبت: } (y-b) = (x-a) \text{ قاره مستقیم}$$

مثال: عرض از مبدأ خط خاص بر مستقیم $y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}}$ در نقطه $x = \frac{\pi}{2}$ واقع بر

$$y = \ln \sqrt{\frac{\sin x}{1+\cos x}} \quad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow y = 0$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{\sin x}{1+\cos x} \rightarrow y' = \frac{1}{2} (\ln \sin x - \ln(1+\cos x))$$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos x}{\sin x} - \frac{-\sin x}{1+\cos x} \right) \quad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$(y-0) = \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \quad x=0 \rightarrow y = -\frac{\pi}{4}$$

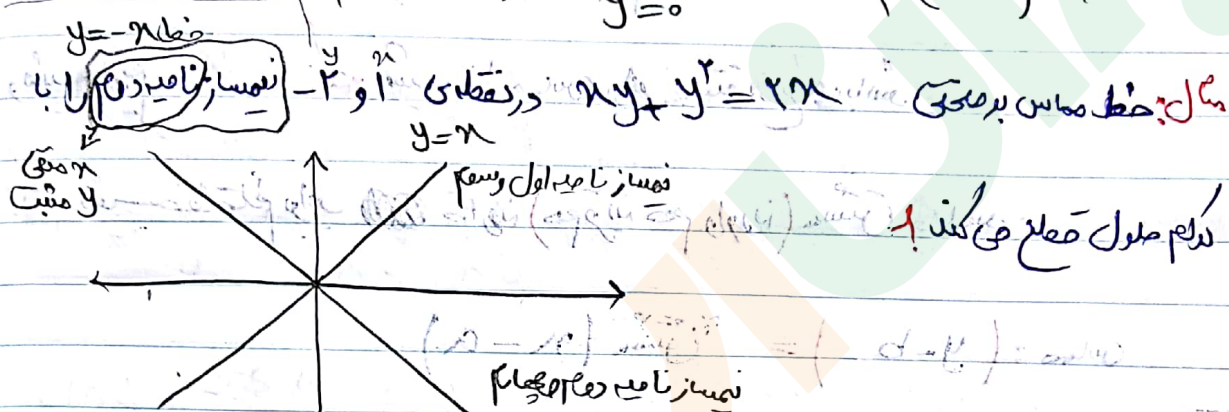
مثال: خط قائم بر مستقیم در نقطه $x=2$ واقع بر آن محور $y=0$ و محور x با کدام خط موازی می‌گردد؟

خوب، مثلاً گفته است قائم پس کارهایش کنیم.

$$y = (x+1)e^{2-x} \xrightarrow{x=2} y=3 \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=3 \end{cases}$$

$$y' = 1 \cdot e^{2-x} + (-1)e^{2-x}(x+1) \xrightarrow{x=2} y' = -2 \xrightarrow{\text{قائم}} m_{\text{قائم}} = +\frac{1}{2}$$

$$(y-3) = \frac{1}{2}(x-2) \xrightarrow{y=0} -3 = \frac{1}{2}(x-2) \rightarrow x = -4$$



نمسا، مماس در 1 و -2

نمسا، مماس در 1 و -2

نمسا، مماس در 1 و -2

$$xy + y^2 = 2x \quad \begin{cases} x=1 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$xy + y^2 - 2x = 0 \xrightarrow{y' = 0} \frac{y-2}{x+2y} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} x=1 \\ y=-2 \end{smallmatrix}} m_{\text{مماس}} = -\frac{4}{3}$$

$$(y+2) = -\frac{4}{3}(x-1)$$

$$\begin{cases} y+2 = -\frac{4}{3}(x-1) \\ y = -x \end{cases} \rightarrow -x+2 = -\frac{4}{3}(x-1) \rightarrow -3x+6 = -4x+4 \rightarrow \boxed{x = -2}$$

مسئله: خط مماس بر منحنی $2y^2 + xy + x^2 - 4x = 0$ در نقطه 1 بر روی منحنی واقع در ناحیه اول

خط مماس بر منحنی

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$a+b+c=0 \rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x = \frac{c}{a} \end{cases}$$

$$a+c=b \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x = -\frac{c}{a} \end{cases}$$

$$x^2 + xy + y^2 - 1 = 0 \quad \xrightarrow{y=1} \quad x^2 + x + 1 - 1 = 0 \quad \xrightarrow{x=0} \quad (0, 1) \quad \text{و} \quad (1, 1)$$

$$y' = -\frac{y - 2x^2 - 2}{x^2 + y} \quad \xrightarrow{y=1} \quad m_{\text{ماس}} = 0$$

$$\begin{cases} (y-1) = 0 \\ x=0 \end{cases} \rightarrow y=1$$

مثال: خط مماس بر منحنی $F(x)$ در نقطه $x=1$ را بیابید.

$$\text{ابتدال: } \int_1^a = 0 \quad \text{و} \quad \int_1^1 = 0$$

$$F(x) = \int_x^1 \sqrt{t^2 + 3t} \, dt \quad \xrightarrow{x=1} \quad y = \int_1^1 = 0 \quad \text{و} \quad \text{نقطه} = \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

$$y' = 0 - 1(\sqrt{x^2 + 3x}) \quad \xrightarrow{x=1} \quad m_{\text{ماس}} = -2$$

$$(y-0) = -2(x-1) \rightarrow y = -2x + 2$$

مثال: خط مماس بر منحنی $\begin{cases} x = t^2 + 3t - 1 \\ y = 2t^2 - 2t - 5 \end{cases}$ در نقطه $t=2$ را بیابید.

$$\text{نقطه} = \begin{cases} x=2 \\ y=-1 \end{cases} \quad y' = \frac{4t-2}{2t+3} \quad \xrightarrow{t=2} \quad m_{\text{ماس}} = \frac{4}{7}$$

$$(y+1) = \frac{4}{7}(x-2)$$

نکته: ۲ منحنی F و G در $x=a$ با هم مماس باشند سبب هم برابر باشند.

$$F'(a) = G'(a)$$

$$F'(a) \cdot G'(a) = -1$$

سبب: مماس در هرگاه سبب هم باشند.

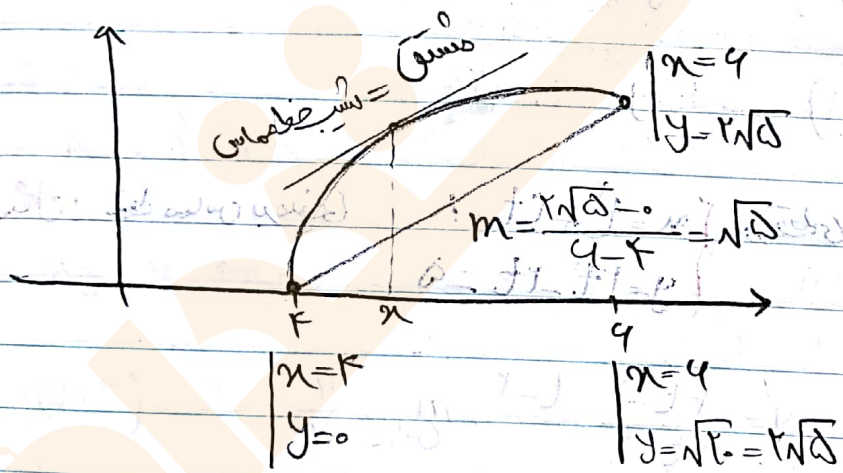
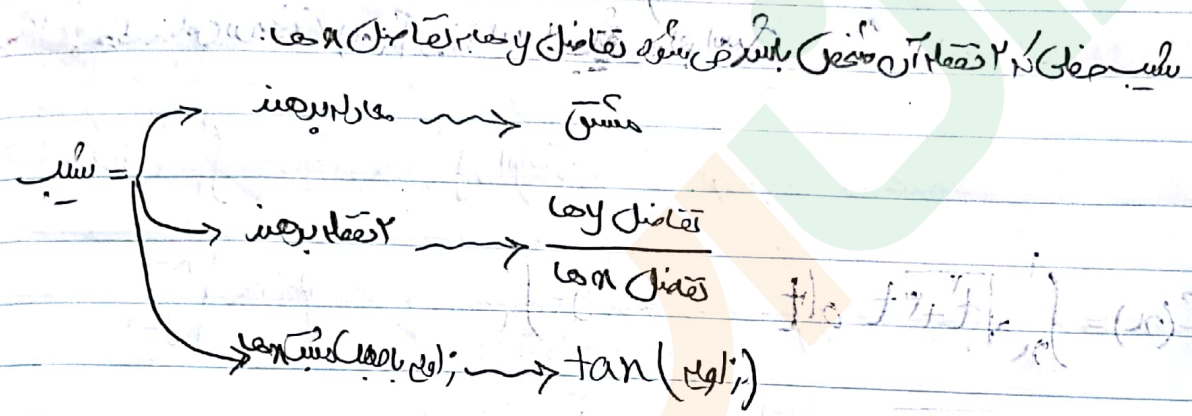
ج. معادله‌های هم‌جهت‌یابی (تangent) را برای دستگاه‌های مختصات بنویسید:

$$\begin{cases} F(a) = g(a) \\ F'(a) = g'(a) \end{cases}$$

تذکره: در حالتی که معادله هم‌جهت‌یابی درجه ۲ شود، ممکن است از $\Delta = 0$ استفاده شود.

مثال ۱) محاسبهٔ مقدار تابع $F(x) = \sqrt{x^2 - 14}$ در بازه‌ی بسته‌ی $[4, 7]$ ، رسم کنید.

در نقطه‌ی بدین منحنی خط مماس (تangent) می‌کشیم. این خط ۲ سر هم به هم وصل می‌کند. طول قطعه‌ی اول است.



$$\frac{y}{x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 14}} = \sqrt{5} \rightarrow \frac{y}{x} = \sqrt{5}$$

$$x^2 = 5x^2 - 14 \rightarrow x^2 = 14 \rightarrow x = \pm \sqrt{14} \rightarrow x = \sqrt{14}$$

[illegible]

۱- در آستان و صواری، اباهم در آستان اربع آستان و در حصار

$$G_{\text{obs}}^{-1} = \frac{1}{r_N^2} + a \xrightarrow{n \rightarrow \infty} m = \frac{1}{f} + a$$

$$dy + Fm = 1 \xrightarrow{\text{Gibbs}} m' = -\frac{F}{\phi} \xrightarrow{\text{Nernst}} + \frac{d}{F}$$

$$\frac{1}{f} + a = \frac{d}{f} \Rightarrow a = \frac{f}{f} = 1$$

مسئله: برای کدام مقدار B خط $y = -3x + b$ با منحنی $y = x^3 - 3x^2$ مماس است؟

$$\begin{cases} x'' - 3x' = -3x + b \xrightarrow{x=1} 1 - 3 = -3 + b \xrightarrow{b=1} \\ x'' - 3x' = -3x \xrightarrow{x=1} 1 - 3 = -3 \end{cases}$$

உதிரல்

حساس

مثال ۱: اگر $f(x) = x^2 + 1$ و $g(x) = ax^2 + bx$ باشد، a و b را بیابید.

و قیام در این راه بود مستحق مدح و تهنیت و از روش و نظامی که بنم.

$$\begin{cases} ax'' + f(x) = x'' + 1 \\ \text{Gauss} \end{cases}$$

$$\rightarrow (a-1)x^p + fx - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow 17 - f(-1)(a-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{b' - fac}$$

$$17 + Fa - F = 0$$

$$ka = -1 \Rightarrow \underline{\underline{a = -1}}$$

مثال: اگر دو خط موازی باشند $y = \frac{2a}{x+1}$ به خط گذرا به افتد $A \begin{vmatrix} 2 \\ 1 \end{vmatrix} B \begin{vmatrix} 3 \\ -1 \end{vmatrix}$ موازی باشند

$$m_{AB} = \frac{1 - (-1)}{2 - 1} = -1$$

اگر دو خط موازی باشند

$$(y-1) = -1(x-2)$$

$$y-1 = -x+2 \rightsquigarrow y = -x+3$$

موازی

$$\begin{cases} -x+3 = \frac{a}{x+1} \end{cases}$$

$$\Rightarrow -x^2 + 2x + 3 = a \Rightarrow a = 3$$

$$-2x + 2 = 0 \Rightarrow x = 1$$

دیسری ضعیف مشتق بلبردی

مثال: اگر $f(x) = x^3 + x$ باشد خط قائم بر حقیقی f' در نقطه $x=2$ واقع بر آن محور را معادل باشد

خط قائم می‌کند

$$f(x) = x^3 + x$$

$$\left. \begin{array}{l} x = y'' + y \\ x = 2 \end{array} \right\} \rightarrow y = 1$$

$$y''' + y - x = 0 \Rightarrow y' = -\frac{1}{xy^2 + 1} \xrightarrow{y=1} \frac{1}{x} \xrightarrow{\text{نقطه}} m_{\text{مماس}} = -\frac{1}{x}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (y-1) = -\frac{1}{x}(x-2) \\ x=0 \end{array} \right. \Rightarrow y=1$$

مشتق مرتب بالاتر:

مثال: مشتق مرتب ۱۰ ام $y = \ln(2x-1)$ در نقطه $x = \frac{3}{2}$ کدام است؟

نکته ۱: (استرانی عبارت $ax+b$ دایره‌ای بی‌نام عبارت)

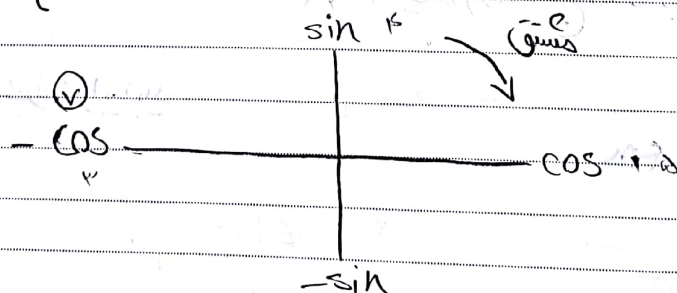
t قرار دهیم

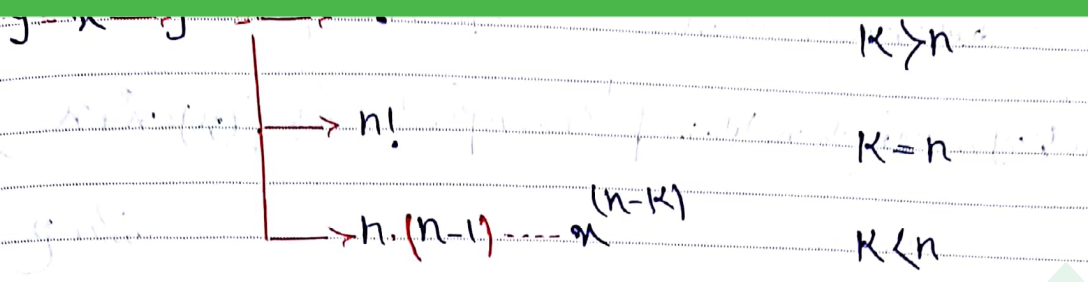
نکته ۲: ضرب n بتوان مرتب می‌مشتق می‌رسد

نکته ۳: ضرب تابع، مشتق n ضرب می‌شود

$$y = \sin(2x-5) \xrightarrow{+} y^{(n)} = 2^n \cdot (\cos t) = -2^n \cos(2x-5)$$

$$y = 3 \cos(5x-1) \xrightarrow{+} y^{(n)} = 3 \cdot 5^n \cdot (-\sin(5x-1))$$





$$y = x^0 \rightarrow \begin{cases} y^{(1)} = 0 \\ y^{(2)} = 0! \\ y^{(k)} = 0 \times 1 \times 2 \times \dots \times (k-1) \end{cases}$$

$$y = \frac{1}{t} \begin{cases} \text{for } n \rightarrow y^{(n)} = \frac{n!}{t^{n+1}} \\ \text{for } n \rightarrow y^{(n)} = \frac{-n!}{t^{n+1}} \end{cases} \quad y = \frac{1}{x} \rightarrow \begin{cases} y^{(n)} = \frac{-n!}{x^{n+1}} \\ y^{(1)} = \frac{-1!}{x^2} \end{cases}$$

جواب مثال قبل: $x = \frac{3}{4}$

$$y = \ln(2x-1) \rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{2x-1}$$

$$y = \ln t \rightarrow y^{(1)} = \frac{1}{t} \rightarrow y^{(9)} = \frac{(-9!)}{(2x-1)^{10}} = -9!$$

$(\frac{3}{4}(\frac{3}{2}) - 1)^{10} = 2^{10}$

کاربرد مشتق:
نقطه بحرانی: نقطه $x=a$ را یک نقطه بحرانی برای تابع f می‌نامیم.
نقطه صریح مشتق: $(a, f(a))$ را نقطه صریح مشتق می‌نامیم.

بیاب کردن نقطه بحرانی: از تابع مشتق بگیرد و برابر صفر قرار دهد. (هم صورت و هم مخرج)

(۲) رسم صحیح اندر دامنه تابع اصلی باشد طول نقاط بحرانی است.

مثال: نقاط بحرانی را بیابید.

$$y = \sqrt{x^2 - 4x}$$

$$y' = 2x - 4 = 0 \rightarrow x = 2 \notin D_f$$

$$2\sqrt{x^2 - 4x} = 0 \rightarrow x = 0, 4 \notin D_f$$

$x(x-4) = 0 \rightarrow x = 0, 4$

نقاط را از بیاب کردن درون تابع قرار دهیم
 تا مشخص درون دامنه است یا خیر
 $(1) \sqrt{0^2 - 4(0)} = 0$
 $(2) \sqrt{4^2 - 4(4)} = 0$

نکته: برای پیدا کردن نقاط بحرانی تابع سهم در مطلق: (۱) داخل قدر مطلق را برابر صفر قرار دهید.

(۲) قدر مطلق را حذف کرده و معادله را برابر صفر قرار دهید.

مثال: نقاط بحرانی را بیابید.

$$y = |x^2 - 2x|$$

$$x^2 - 2x = 0 \rightarrow x = 0 \text{ داخل}$$

$$x = 2$$

$$\{0, 2\} = \text{نقاط بحرانی}$$

$$x = 1 \rightarrow 2x - 2 = 0 \text{ مشتق} \rightarrow y = x^2 - 2x \text{ حذف قدر مطلق}$$

استدلال‌های مطلق (بیشترین و کمترین مقدار)

(۱) از تابع مشتق گرفته و نقاط بحرانی را بیابید.

(۲) x های بحرانی را درون تابع اصلی قرار داده و همچنین x های ابتدا و انتها را با y های مشتق را درون

تابع اصلی قرار داده و آن‌ها را بیابید.

(۳) آن‌ها را با هم مقایسه کنید.

$$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ (ابتدا)} \\ f \text{ (بحرانی داخل)} \\ f \text{ (انتهای)} \end{array} \right.$$

مثال: کمترین مقدار تابع $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$ در بازه $[1, 4]$ نام انتخاب

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x \quad [1, 4]$$

$$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 0 \rightarrow x = -1 \text{ بازه } x \text{ ندارد}$$

$$\rightarrow x = 3 \quad \checkmark \quad -\frac{c}{a} \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} f(1) = -11 & \text{max مطلق} \\ f(3) = -27 & \text{min مطلق} \\ f(4) = -20 & \end{array} \right.$$

ANDISHEH

$$R_f = [-27, -11]$$

$$f(x) = (1-2x)^{\frac{3}{2}} \sqrt{x} \quad [-3, 2]$$

$$y = (1-2x)^{\frac{1}{2}} = 1^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{2}} = 1 - 2x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} \left(1 - \frac{1}{x}\right) = 0 \quad x = 0$$

$$1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow x = 1$$

$$f(-3) = 9\sqrt{-3}$$

$$f(0) = 0$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \text{max}$$

$$f(2) = -\sqrt{2}$$

مثال: بیشترین مقدار $y = x^2 - x - \ln x$ را برای $x > 0$ پیدا کنید.

$$y = x^2 - x - \ln x$$

$$y' = 2x - 1 - \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{2x^2 - x - 1}{x} = 0 \Rightarrow 2x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \quad \checkmark$$

$$x = \frac{1}{2} \notin D_f$$

$$x = 0 \notin D_f$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f(1) = 0$$

حل صحیح نیست

۱۵۲) وقتی حد ۲ و اینکه باسر صفر می شود در این مثال چون $\frac{\partial y}{\partial x}$ این عبارت حد ۲ و اینکه باسر صفر می شود

صفر پس جواب صحیح همان اولی می شود $\frac{x^2}{y}$

$$Z = x^r e^{-y} + \frac{1}{x+y}$$

$$x \frac{\partial Z}{\partial x} + y \frac{\partial Z}{\partial y} = x(r x^{r-1} e^{-y}) + y(-x^r e^{-y}) \xrightarrow{y=1} \frac{x=r}{y=1} \lambda + 1(-r) = r$$

$$Z = \frac{x^r}{y^r} \ln \frac{x}{y} = \frac{x^r x^r}{x^r y^r} \ln \frac{x}{y} \Rightarrow \lambda \left(\frac{x^r}{y^r} \ln \frac{x}{y} \right) Z = \lambda Z = Z \quad (479)$$

$$y = x + \cos x \quad (474)$$

$$\begin{cases} x = t \\ y = t + \cos t \end{cases} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 - \sin t}$$

$$\frac{d^2 x}{dy^2} = \frac{d\left(\frac{dx}{dy}\right)}{dy} = \frac{d\left(\frac{1}{1 - \sin t}\right)}{1 - \sin t}$$

$$\left(\frac{0 - (-\cos t)}{(1 - \sin t)^2} \right) \xrightarrow{t=x=\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{\sqrt{r}}{r}}{\frac{1}{\lambda}} = \underline{\underline{r\sqrt{r}}}$$

$$y = \frac{x^r}{r} \ln x \quad (481)$$

$$y' = x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{x^r}{r} = x \ln x + \frac{x}{r} \xrightarrow{x=\frac{1}{r}}$$

$$\frac{1}{r} \ln \frac{1}{r} + \frac{1}{r} = -\frac{1}{r} \ln r + \frac{1}{r} = \frac{1}{r} (-\ln r + 1) = \frac{1}{r} (-\ln r + 1) = \underline{\underline{\frac{1}{r} (1 - \ln r)}}$$

$$\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = t^r \end{cases} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{rt}{-e^t}$$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{rt}{-e^t}\right)}{-e^t} = \frac{rt(-e)^t - (e^t)(rt^r)}{-e^t} \xrightarrow{t=1}$$

$$\frac{rt(-e^t) - (e^t)(rt^r)}{(-e)^r} = \frac{-re^t}{-e^r} = \underline{\underline{+re^{+r}}}$$

$$y = \sin^2 x \rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

$$y' = \frac{(-1-1) \cdot \sin^2 m}{(\sin^2 x + 1)^2} \quad x = \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{-2}{\frac{1}{1}} = -2$$

$$y = \frac{au+b}{cu+d} \Rightarrow y' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \cdot u'}{()^2}$$

$$x^p + y^p = 1$$

$$y' = \ominus \frac{r^2 x^r}{r^2 y^r} = \frac{-x^r}{y^r} \xrightarrow{y \rightarrow u} u' = \frac{-x^r}{u^r} \rightarrow u'' = \frac{-r x \cdot u^r}{u^{r+1}} \rightarrow r u u' (-x^r)$$

$$= \frac{-rxu' - ru\left(\frac{-x^r}{u^r}\right)(-x^r)}{u^r} = \Delta u \cdot u'' - u \Delta \left(\frac{-rxu' - r\frac{x^r}{u}}{u^r} \right) = -rxu'' - rx^r$$

۱- استرهای نسبی :

آزادک جنتی (اول: ۱) از جامع جنتی گرفته و برابر صفقه قرار دهیم (صورت و مخفی)

(۳) جدول سینه سلامت را بارسم کنید (برای هر دو صورت)

۱. در پیش ضرب یا قسم می شود، اذف کند (۱)

(۱۳) درجہ لا حجت بائد تابع صدوری و درجہ لا معنی بائد تابع صدوری است

$\text{Cost}'(x) = 4x^3 - 2x^4$

$$F(x) = \psi x^\Delta - \Delta x^\psi$$

$$y' = 10x^9 - 10x^9 = 10x^9(x^9 - 1)$$

مسئله اول $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

ANDISEHEN

x	-1	$+1$
y	$+$	$-$
z	0	0

↑ $\text{C}_{11} = 1$ $\text{C}_{21} = 0$ $\text{C}_{31} = 0$ ↑



$$f(x) = (x - \Delta) \sqrt{x}$$

$$f(x) = (x - \Delta) \sqrt{x} = (x - \Delta) x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow y = x^{\frac{3}{2}} - \Delta x^{\frac{1}{2}}$$

$$y' = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta x^{-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{\Delta}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow$$

x		0	2	
y'	+		-	+
y	↗	○	↘	↗
		max	min	

محل

حدا

حدا

محل ماکسیمم = 2

ریشه

برای حل مسائل مثل e و $\ln x$ ، می‌توانیم از روش مشتق‌گیری استفاده کنیم.

$$x^x = \Delta \Rightarrow x = \ln \Delta$$

$$\ln x = \Delta \Rightarrow x = e^{\Delta}$$

$$f(x) = x^x \ln x$$

$$f(x) = x^x \ln x \Rightarrow y' = x \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot x^x =$$

$$x(x \ln x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$x \ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{x} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{x}}$$

x		0	e^{-1}	
y'	+		-	+
y	↗		↘	↗

$$(0, e^{-1}) = (0, \frac{1}{e})$$

مثال: نقاط بحرانی تابع $y = x e^{\frac{1}{x}}$ را بیابید.

$\min x = \frac{1}{p} (x)$ $\max x = \frac{1}{p} (x)$ $\min x = \frac{1}{p} (x)$ $\max x = \frac{1}{p} (x)$

$$y = x^2 e^{\frac{1}{x}} \Rightarrow y' = 2x \cdot e^{\frac{1}{x}} + \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \cdot x^2$$

$$2x e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}} (2x - 1)$$

نقطه بحرانی: $2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

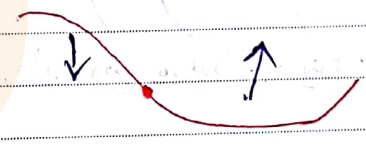
x	$\frac{1}{2}$
y'	- +
y	$\searrow$ 0 $\nearrow$

جدول
 جدول $x = \frac{1}{2} \min$
 جدول

تقریباً: نقطه بحرانی نمودار

چند تقریب و نقطه بحرانی:

نقطه بحرانی: نقطه بحرانی نمودار



۱) از تابع $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$ در $x = \frac{1}{2}$ و $y = \frac{1}{4} e^2$ (نقطه بحرانی)

۲) جدول تغییر علامت y' را رسم کنید (مقام y' را حل کنید و علامت y' را بیابید).

۳) هر جا $y' > 0$ باشد، تابع در حال افزایش است (صورت است) و چنانچه $y' < 0$ باشد، تابع در حال کاهش است (عکس است).

۴) نقطه بحرانی علامت y' عوض شود نقطه بحرانی علامت است (نقطه بحرانی).

مثال: چند تقریب و نقطه بحرانی تابع $y = x^2 + \frac{1}{x}$ را بیابید.

$$y = x^2 + \frac{1}{x}$$

چنانچه $y' > 0$ باشد، تابع در حال افزایش است (صورت است) و چنانچه $y' < 0$ باشد، تابع در حال کاهش است (عکس است).

ما جدول تغییر علامت y' را رسم می‌کنیم و نقطه بحرانی آن را بیابیم.

$$y = x' + \frac{1}{x} \rightsquigarrow y = 2x + \frac{0-1}{x^2} \rightsquigarrow y = 2 + \frac{0-1}{x^2} =$$

$$2 + \frac{1}{x^2} = \frac{2x^2 + 1}{x^2} = 0 \rightsquigarrow x = -1$$

$$x^2 = 0 \rightsquigarrow x = 0$$

x	-1	0	∞
y''	+	-	+
y	U	O	U

نقطه عطف

چون صفر بازه است

نکته: در مشتق دوم چنانچه عبارت‌های هم‌درجه مثبت (در صورت وجود) منفی شود، ریشه‌های مثبت آن‌ها از

ی طول نقاط عطف می‌باشند. (مثلاً آن‌ها در دامنه $[-1, 0]$ با شیب و نیازی به جدول تعیین علامت نیست.

مثال: طول نقاط عطف $y = (x^2 + x)e^{-x}$ کدام است؟

اگر تابع را با مشتق دوم e^{-x} بسازیم و جدول تعیین علامت بسازیم.

$$y = (x^2 + x)e^{-x}$$

$$y' = (2x + 1) \cdot e^{-x} + (-e^{-x})(x^2 + x) = e^{-x}(-x^2 + x + 1)$$

$$y'' = -e^{-x}(-x^2 + x + 1) + (-2x + 1) \cdot e^{-x} \Rightarrow e^{-x}(x^2 - 3x) \rightsquigarrow$$

$$x^2 - 3x = 0 \rightsquigarrow x = 0$$

$$\rightsquigarrow x = 3$$

x	0	3
y''	+	-
y	U	U

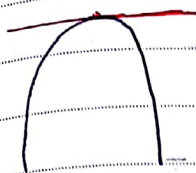
دستی $D = R - \{\text{ریشه‌های ضریب}\}$

زیر $D = \{ \text{زیر ادیکال} \}$

توابع مشتق است با آن‌ها به جدول تعیین علامت

ANDISHEH

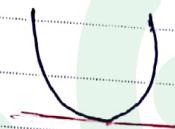
Ln $D = \{ \text{عبارت‌های طولی} \}$



$$\max \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) < 0 \end{cases}$$



$$\min \begin{cases} f'(a) = 0 \\ f''(a) > 0 \end{cases}$$



مسائل را با بررسی نقطه عطف و استفاده از تست دوم، روشی مناسب نقطه عطف یا استیم را به روش دوم و به روش اول

در حل این مسائل به نکات زیر توجه کنید:

۱) نقطه عطف را به روش دوم، رضایه می بینیم و می توانیم

۲) اول استیم و مشتق اول را بررسی کنیم

۳) اول عطف و مشتق دوم را بررسی کنیم

مثال ۱: اگر A نقطه استیم تابع $y = ax^3 + \frac{b}{x}$ باشد. a و b را بیابید.

$$a(1)^3 + \frac{b}{1} = 3$$

$$y' = 3ax^2 + 0 - \frac{b}{x^2} \xrightarrow[x'=0]{x=1} 3a - b = 0$$

$$\oplus \begin{cases} a + b = 3 \\ 3a - b = 0 \end{cases}$$

$$4a = 3 \Rightarrow a = \frac{3}{4} \Rightarrow a + b = 3 \Rightarrow b = \frac{9}{4}$$

مثال ۲: اگر مشتق $y = x^3 + 3ax^2 + 1$ در $x=1$ نقطه عطف باشد. a را بیابید

پایه صدمه اگر سری تفرصاتی تابع $y = x^3 + 3ax^2 + 1$ در $x=1$ عطف شود. a را بیابید

$$y = x'' + 2ax' + a$$

$$y' = 2x' + 2a$$

$$y'' = 2x + 2a \xrightarrow{x=1, y'=0} 4 + 2a = 0 \rightarrow a = -\frac{4}{2}$$

برای a مناسبی تابع $y = \frac{x^2 + 2x + a}{x+1}$ برابر f می باشد.

$$\begin{cases} \frac{x^2 + 2x + a}{x+1} = f \\ \text{①} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + 2x + a = fx + f \\ 2x + 2 = f \Rightarrow x = 1 \end{cases} \Rightarrow 3 + a = 1 \Rightarrow a = -2$$

① اول طرفین را در $x+1$ ضرب می کنیم و در $x=1$ بررسی می کنیم.

مسئله از این قرار می گیرد: $y = x^m - mx$ و تعدادی جدول $\perp$ دارای خاصیت نسبتی است.

- ۱) $m < 1$ ۲) $m > 0$ ۳) $m > 1$ ۴) $m < 1$

$$y = x^m - mx$$

$$y' = mx^{m-1} - m \xrightarrow{x=1, y'=0} m - m = 0$$

$$y'' = m(m-1)x^{m-2} \xrightarrow{x=1, y'' < 0} m(m-1) < 0$$

$$m < 1$$

$$f'(x) = 0$$

$$f'(y) = 0$$

نقطه بحرانی توابع چند متغیره

مثلاً: در دستگاه مختصات



مثال: مقدار این تابع در نقطه بحرانی

$$\begin{cases} z'_x = y - \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow y = \frac{1}{x^2} \\ z'_y = x - \frac{1}{y^2} = 0 \rightarrow x + \frac{1}{x^2} = 0 \rightarrow x + x^3 = 0 \rightarrow x(1+x^2) = 0 \end{cases} \begin{cases} x=0 \\ x=-1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{x^2} \\ y = -1 \end{cases} \rightarrow z = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ (-1) & (-1) & (-1) \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

برای کردن نقاط استیسم و زنی در توابع چند متغیره:

(۱) دستگاه زیر را حل کنید.

$$\begin{cases} F'_x = 0 \rightarrow \begin{cases} F''_{xx} \\ F''_{xy} \end{cases} \\ F'_y = 0 \rightarrow \begin{cases} F''_{yy} \\ F''_{yx} \end{cases} \end{cases}$$

$$H_F = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{vmatrix}$$

(۲) دترمینان H_F را بیارید.

(۳) اگر $H_F < 0$ باشد نقطه زنی (نامعین) می باشد.

(۴) اگر $H_F > 0$ باشد، آنگاه تابع دارای استیسم است که برای تعیین نوع استیسم با H_1 مجازی نیست.

U صمیم - معین مثبت - ^{اندا} محذب

n حاد - معین منفی - ^{اندا} محقد

$$\begin{cases} H_1 > 0 \\ H_2 > 0 \\ H_1 < 0 \end{cases}$$

نکته: ضابطه مساوی ضرورت $> یا <$ باشد شرطین می باشد.

فرض کنیم (x, y) نقطه ای باشد که در آن f به بیشینه یا کمینه می رسد.

$$\begin{cases} F'_x = F_x + \lambda y = 0 & \rightarrow F''_{xx} = F \\ & \rightarrow F''_{xy} = 4 \\ F'_y = 4y + 4x = 0 & \rightarrow F''_{yy} = 4 \\ & \rightarrow F''_{yx} = 4 \end{cases} \quad H_F = \begin{vmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{xy} & F''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = -12 < 0$$

نقطه سرج

$(F \times 4) - (4 \times 4) = -12$

مثال: نقطه های این تابع را در $x=1$ و $y=2$ پیدا کنید.

$$Z = 3x^2 + y^2 - 4x + 4y$$

1) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ سرج
 2) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ سرج
 3) $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}$ min
 4) $\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$ max

$$\begin{cases} F'_x = 6x^2 - 4 & \rightarrow F''_{xx} = 12x \\ & \rightarrow F''_{xy} = 0 \\ F'_y = 2y + 4 = 0 & \rightarrow F''_{yy} = 2 \\ & \rightarrow F''_{yx} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 6x^2 - 4 = 0 & \rightarrow x = \pm 1 \\ 2y + 4 = 0 & \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

(1, -2)
(-1, -2)

$$H_F = \begin{vmatrix} 12x & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow H_F = 24 > 0 \rightarrow \text{min}$$

$$\begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow H_F = -12 < 0 \rightarrow \text{سرج (نقطه)}$$

مثال: نقاط بحرانی این تابع را در $x=1$ و $y=2$ پیدا کنید.

$$Z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 2y$$

(نقطه سرج)

$$\begin{cases} F'_x = 2x + y - 2 & \rightarrow F''_{xx} = 2 \\ & \rightarrow F''_{xy} = 1 \\ F'_y = x + 2y - 2 & \rightarrow F''_{yy} = 2 \\ & \rightarrow F''_{yx} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x + y - 2 = 0 \\ x + 2y - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow \text{نقطه}$$

ANDISHEH

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2y-\delta=0 \\ x+2(\delta-2x)-\delta=0 \end{cases}$$

$$-7x^2 + 4x + \delta = 0 \rightarrow x=1 \rightarrow y=2$$

$$\rightarrow x = -\frac{\delta}{4} \rightarrow y = \frac{3\delta}{12}$$

$$H_r = \begin{vmatrix} 4x & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} (1,2) \\ (-\frac{\delta}{4}, \frac{3\delta}{12}) \end{vmatrix} \Rightarrow H_r = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow H_1 = 4 > 0 \rightarrow \min$$

جواب سؤال = (مینه) (Gu)

$$z = 4x^2 + 2xy + y^2 - x - 14y$$

مثال: تابع مقابل چه است؟

$$\begin{cases} F'_x = 8x + 2y - 1 \rightarrow F''_{xx} = 8 \\ F'_{xy} = 2 \rightarrow F''_{xy} = 2 \\ F'_y = 2x + 4y - 14 \rightarrow F''_{yy} = 4 \\ F''_{yx} = 2 \end{cases}$$

$$H_r = \begin{vmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \Rightarrow (8)(4) - (2)(2) = 30 > 0 \rightarrow H_1 = 8 \rightarrow \min$$

مینه است این جواب می شود.

الستم های مقید: تابع درجه دوم آنرا داریم تابع هدف و تابع رابحه

شرایطی نامفهوم: (1) از تساوی زیاد یک رابطه بین مقیدها بیاید.

$$\lambda = \frac{z(\text{هدف})}{x(\text{هدف})} = \frac{y(\text{هدف})}{y(\text{هدف})} = \frac{z(\text{هدف})}{x(\text{هدف})}$$

مقدار هر یک از مقیدها را در تابع هدف قرار دهیم و جواب ها را بیاییم.

۳) جواب های درست آمده از قیاس دومت چنانچه باشند...

بیشترین مقدار $z = x^2 + 4y^2 + 4xy$ باشد $y = 12 - x$ در C است

میتوانیم تابع را به مرتب با x درجه اول = $x + y = 12$

$$\lambda = \frac{2x + 4y}{1} = \frac{4y + 4x}{1} = 2y = 4x \rightarrow y = 2x$$

سپس $x + 2x = 12 \rightarrow x = 4 \rightarrow y = 8 \rightarrow z = 324$

مثال ۲: کمترین مقدار $f(x, y, z) = xyz$ باشد $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ در C است

$$\lambda = \frac{yz}{2x} = \frac{xz}{2y} = \frac{xy}{2z}$$

$$\frac{yz}{2x} = \frac{xz}{2y} \Rightarrow x^2 = y^2$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 12 \rightarrow x^2 + x^2 + z^2 = 12$$

$$\frac{xz}{2y} = \frac{xy}{2z} \Rightarrow y^2 = z^2$$

$$x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

$$y = \pm 2$$

$$z = \pm 2$$

$$f_{\max} = 1$$

مثال ۳: بیشترین مقدار $f(x, y) = x^2 - y^2$ باشد $xy = 1$ در C است

$$\lambda = \frac{2x}{y} = \frac{-2y}{x} \Rightarrow x^2 = -y^2 \Rightarrow x^2 = -y^2 \quad (\text{X})$$

درستی = درستی

مثال ۴: بیشترین مقدار $f(x, y) = \sqrt{x^2 + 4y^2 - 12y + 12}$ در C است؛ C شامل نقاطی است که از صاف‌نمایی را می‌سازد

چون C شامل نقاطی است که از صاف‌نمایی را می‌سازد، پس باید به بیشترین مقدار f رسید

در تابع چند متغیره چنانچه کمترین و بیشترین مقدار را بخواهیم و شرط لازم است که C شامل نقاطی باشد که از صاف‌نمایی را می‌سازد

$$\begin{cases} f'_x = 2x + 2 = 0 \rightarrow x = -1 \\ f'_y = 4y - 12 = 0 \rightarrow y = 3 \end{cases}$$

$$\sqrt{1 + 12 - 24 - 12 + 12} = \sqrt{9} = 3$$

تفاضل $\Delta x = dx = x_2 - x_1$

تفاضل $\Delta f = f(x_2) - f(x_1)$

تفاضل $df = \text{مشتق} \times dx$

مثال: اگر $y = x^2 + x$ و $|dy - \Delta y|$ باشد $x=1$ و $\Delta x = 0.1$ باشد

$\Delta x = x_2 - x_1$

$0.1 = 1.1 - 1$

حاصل کدام است؟

$\Delta f = f(1.1) - f(1) = ((1.1)^2 + (1.1)) - (1^2 + 1) = 2.21 - 2 = 0.21$

$df = (2x + 1) \cdot dx \xrightarrow{x=1, dx=0.1} df = 0.3$

$0.21 - 0.3 = -0.09$

مثال: در تابع $y = x^2 + \frac{1}{x}$ با خطای 0.2 برای x در نقطه $x=5$ برآورد مساحت است. $dy = df$

$x=5 \quad dx=0.2$

ی کدام است؟

پایه دیندر در تابع $y = x^2 + \frac{1}{x}$ با افت 0.2 برای x در نقطه $x=5$ تقریباً مساحت را بدین روش

$dy = df$

$dx=0.2$

پایه دیندر در تابع $y = x^2 + \frac{1}{x}$ با تقریب افت 0.2 برای x در نقطه $x=5$ تقریباً مساحت را بدین روش

$dy = df$

$dx = 5.2 - 5 = 0.2$

$y' = 2x + \frac{-1}{x^2}$

$dy = (2x + \frac{-1}{x^2}) \cdot dx \xrightarrow{x=5, dx=0.2}$

$$d'f = \text{مشتق} \cdot dx$$

مثال: دینانسیل مرتبه دوم $y = xe^x$ در نقطه $x=1$ و $y=1$ و $\Delta x = 0.1$ است.

$$y = xe^x$$

$$y' = 1 \cdot e^x + e^x \cdot x = e^x(1+x)$$

$$y'' = e^x(1+x) + 1 \cdot e^x \rightarrow d'y = (e^x(1+x) + 1) \Rightarrow dy = (e^x(1+x))$$

$$d'y = (e^x(1+x)) \cdot dx \xrightarrow[\Delta x = 0.1]{x=1} 1e \cdot (1.1) = 1.1e$$

دینانسیل کامل: جابجایی تابع f نسبت به متغیر مستقل x و y باشد و آنرا دینانسیل کامل می‌گویند.

$$dx = \Delta x$$

$$dy = \Delta y$$

$$df = f'_x dx + f'_y dy$$

مثال: دینانسیل کامل $z = xy^3 + x^2y$ در نقطه $x=1$ و $y=1$ و $\Delta x = 0.1$ و $\Delta y = 0.2$ است.

$$z = xy^3 + x^2y \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow (z'_x = y^3 + 2xy) \cdot dx \xrightarrow[\Delta x = 0.1]{x=1} \frac{-\Delta}{100} \\ \rightarrow (z'_y = 3xy^2 + x^2) \cdot dy \xrightarrow[\Delta y = 0.2]{y=1} \frac{2.0}{100} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{1.2}{100}$$

مثال: تغییر تابع $z = \sqrt{x^2 + 2y^2}$ در نقطه $(1, 1)$ به $(1.1, 1.2)$ و $\Delta x = 0.1$ و $\Delta y = 0.2$ است.

$$\rightarrow (z'_x = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}) \cdot dx$$

$$\rightarrow (z'_y = \frac{4y}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}) \cdot dy$$

$$F'_x = \dots \rightarrow F''_{xx} \cdot dx^r$$

$$F'_x = \dots \rightarrow F''_{xy} \cdot dxdy^r$$

$$F'_y = \dots \rightarrow F''_{yy} \cdot dy^r$$

$$F'_y = \dots \rightarrow F''_{xy} \cdot dxdy^r$$

$$d^2z = F''_{xx} \cdot dx^r + 2F''_{xy} \cdot dxdy^r + F''_{yy} \cdot dy^r$$

مثال: دریناسیل مرتبه دوم تابع

$$Z = x^2 + F_{xy} + F_{yy}$$

$$Z'_x = 2x + F_y \rightarrow Z''_{xx} = 2 \cdot dx^r$$

$$\rightarrow Z''_{xy} = F_{xy} \cdot dxdy^r$$

$$Z'_y = F_x + F_y \rightarrow Z''_{yy} = F_{yy} \cdot dy^r$$

$$\rightarrow Z''_{xy} = F_{xy} \cdot dxdy^r$$

$$d^2Z = 2dx^r + F_{xy}dxdy^r + F_{yy}dy^r$$

کاربرد دیفرانسیل: (برای کردن مقدار تقریبی)

(تابع را پیدا کرده و از آن مشتق بگیریم)

$$F(x+dx) = F(x) + dx \cdot F'(x)$$

مثال: مقدار تقریبی

$$\tan^{-1} \sqrt{x} \quad x=1.04 \quad \text{باز از } \frac{\pi}{4} \quad \text{بسته است}$$

$$F(x) = \text{Arc tan} \sqrt{x} \rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{x})^2}$$

$$F(1.04) = F(1 + 0.04) = F(1) + 0.04 \cdot F'(1)$$

$$= \text{Arc tan } 1 + \frac{0.04}{1} \cdot \frac{1}{1+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{100}$$

بسته است از $\frac{\pi}{4}$ بسته است

$$f(x) = \sin x \rightsquigarrow f'(x) = \cos x$$

$$x = \frac{\pi}{18}$$

$$f(1.1) = f(1 + 0.1) = f\left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{18}\right) = f\left(\frac{\pi}{9}\right) = f'\left(\frac{\pi}{9}\right) =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{\pi}{18} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \checkmark$$

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{(2.01)^3 + 2(2.01)}$ بداند و تفاضل درم است!

روش سس x بتواند $\rightarrow f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x} \rightsquigarrow f'(x) = \frac{2x+2}{3(\sqrt[3]{x^2+2x})^2}$

$$f(2.01) = f(2 + 0.01) = f(2) + 0.01 \cdot f'(2) = 2 + \frac{1}{100} \cdot \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{300} = 2.0033$$

مثال: مقدار تقریبی $\sqrt[3]{(2.01)^3 + (2.01)^3} - 1$ بداند و تفاضل درم است!

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \rightsquigarrow f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

$$\rightsquigarrow f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}$$

$$= \frac{3}{\sqrt{2^2 + 3^2 - 1}}$$

$$f(2.01, 2.94) = f(2 + 0.01, 3 - 0.06) = f(2, 3) + \frac{1}{100} f'_x(2, 3) - \frac{6}{100} f'_y(2, 3) =$$

$$2 + \frac{1}{100} \left(\frac{3}{2}\right) - \frac{6}{100} \cdot \frac{3}{4} =$$

مسئله
مسئله

حل سوال 1

جواب در سوال 2

پ. سوال

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{1+x}}{x + \sqrt[3]{1+x}}$$

جواب: سوال 3

$$x \rightarrow -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 + \sqrt[3]{1+x}}{x + \sqrt[3]{1+x}} = \frac{0}{0}$$

(H)

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{1}{3}(\sqrt[3]{1+x})^2}{1 + \frac{1}{3}\sqrt[3]{1+x}}$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{1} = 1$$

پ. سوال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 + 3x - 2}{x^3 - 2x + 2}$$

جواب: سوال 4

$$(H) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 3}{3x^2 - 2} = \frac{0}{0}$$

(H)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{12x^2 - 12x + 7}{7x} = \frac{4}{4} = 1$$

پ. سوال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{1}$$

جواب: سوال 5

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + ax + b} = \frac{1}{1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - \sqrt{x}}{x^2 + ax + b} = \frac{0}{0}$$

(H)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}}{x + a} = \frac{1}{1+a}$$

$$= \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1+a} = \frac{1}{1}$$

$$\left. \begin{array}{l} 1+a+b=0 \Rightarrow b=-1 \\ 1+2a=1 \Rightarrow a=0 \end{array} \right\}$$

$$x \rightarrow 1$$

پ. سوال

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\ln x} \int_1^x \sqrt{t+2} dt$$

جواب: سوال 6

$$x \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\int_1^x \sqrt{t+2} dt}{\ln x} = \frac{0}{0}$$

(H)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \sqrt{x+2}}{\frac{1}{x}} = 2$$



$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) - f}{x + 1} = \frac{f(-1) - f}{0} = \frac{0}{0} \quad \textcircled{H} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{f'(x)}{1} = f'(-1) = \frac{4}{5}$$

$$y = \frac{1}{f(x)} \Rightarrow y' = \frac{0 - f'(x)}{(f(x))^2} \xrightarrow{x=-1} \frac{-f'(1)}{(f(1))^2} = \frac{-\frac{4}{5}}{(1)^2} = -\frac{4}{5}$$

$$1) f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$2) f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

مثال ۱: $f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^3}$

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^3} = (x^2 - 2x)^{\frac{3}{3}} \Rightarrow y' = \frac{2}{3} (x^2 - 2x)^{\frac{3}{3} - 1} \cdot (2x - 2) \xrightarrow{x=2}$$

$$f'(2) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{1}} \cdot 4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1} \cdot 4 = \frac{8}{3}$$

مثال ۲: $f(x) = \sqrt{1+x}$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{x}{\sqrt{1+x^3}}$$

$$f(\sqrt{1+x}) \Rightarrow y' = \frac{1}{2\sqrt{1+x}} \cdot f'(\sqrt{1+x}) \xrightarrow{x=2}$$

$$\frac{1}{2} \cdot f'(2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

جواب: اگر $f(x) = (x^2 - x - 2)\sqrt{x^2 - 7x}$ باشد

$h \rightarrow 0$ h

الرجاء من فضلكم

الرجاء من فضلكم

$$y = r(x^2 - x - r)$$

$$y' = r(rn-1) \overset{n=-1}{\rightarrow} -9$$

رفع اجزاء صفه خریداری می نماید:

سرل صفر یا جعفری دره مسی عورتی و العیاضی

مع صفت: و، هاء سبوق در کاف (کاف) مبنای اسم است؛ مع صفت استقامه نام.

rel. to figs

$\left\{ \begin{array}{l} 1) \sin^n \theta \sim \theta^n \\ \text{Arc sin}^n \theta \sim \theta^n \end{array} \right.$

1) $\tan^n \theta \sim \theta^n \implies \text{Arc } \tan^n \theta \sim \theta^n$

1) $\cos^n 0 \sim 1 - \frac{n}{4} 0^2$

1f) $e^0 - 1 \sim 0$

$$d) \ln(1 \pm 0) \sim 0$$

نالی: درجہ بندی کردہ صفحہ اولیٰ باہر سال کتابی و چٹائی صفحہ دوم صفحہ استعارہ و بیانیہ صفحہ

8. $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ حل: ∞

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \infty \cdot 0 \xrightarrow{\text{Gilt}} \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \frac{1}{x} = 1$$

f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) (x^x - 1)}{(\arcsin(x))^4} \quad \text{check: } \frac{0}{0}

~~ANDISHEH $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)(x^x-1)}{(\arcsin x)^x} = \frac{0}{0}$~~

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(x^x - 1)}{x^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x - 1}{x} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{(H)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^x \cdot \ln x}{1} = \frac{\infty}{\infty}$$

! جواب نهایی

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 - \cos \pi x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{1 - \cos \pi x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{(H)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{+x}{\sqrt{1-x^2}}}{+\pi \sin(\pi x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{\pi \cdot \pi x} = \frac{1}{\pi^2}$$

! جواب نهایی

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) \tan \frac{\pi x}{\lambda}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) \tan \left(\frac{\pi x}{\lambda} \right) = \infty \times \infty$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sqrt{x}}{\cot \frac{\pi x}{\lambda}} = \frac{\infty}{\infty} \xrightarrow{(H)} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{\pi}{\lambda} (1 + \cot^2 \frac{\pi x}{\lambda})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{\pi}} = \frac{\lambda}{2\pi}$$

! نکته: چنانچه ۲ سر با هم جمع شود یا کم شود ابتدا ضریب مشترک در هر دو سر را بیابید.

! جواب نهایی

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1 - \ln x}{(x-1) \cdot \ln x} = \frac{0}{0} \xrightarrow{(H)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{1 \cdot \ln x + \frac{1}{x} (x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \xrightarrow{(H)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}$$

میان دو درجه با هم مقایسه: $(n \rightarrow \infty)$

معمولاً در توان: هرگاه $n \rightarrow \infty$ توان بزرگ تر از توان می ماند به حذف می شود.

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{صورت جمله ای}}{\text{مخرج جمله ای}}$
 صورت قدرتی نباشد $\rightarrow \infty$
 مخرج قدرتی نباشد $\rightarrow 0$
 هر دو مخالف صفر $\rightarrow$ هم توان باشد

مثال: حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{3n^2 - 2} - \frac{n^2}{3n + 2} \right)$ رول (لوس)!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3}{3n^2 - 2} - \frac{n^2}{3n + 2} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^4 + 2n^3 - 3n^3 + 4n^2}{(3n^2 - 2)(3n + 2)} = \frac{2}{9}$$

مثال: حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^2 - 9n^2}{2n}$ رول (لوس)!

چنانچه عامل باقی مانده (مخرج) با عامل (صورت) استقامت دارد، پس در صورت ساده کردن استفاده از $a^2 + 2ab + b^2$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n+1)^2 - 9n^2}{2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^2 + 6n + 1 - 9n^2}{2n} = \frac{4}{5}$$

مثال: حاصل $\lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln(n+2) - \ln n)$ رول (لوس)!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n (\ln(n+2) - \ln n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \frac{n+2}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{2}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \frac{2}{n} = 2$$



بیایید دیدار کنیم و دنباله‌ای
 $a_n = 2n(\sqrt{n^2+1} - n)$ به چه صورتی حد است؟
 $\lim_{n \rightarrow +\infty}$

وقتی بخواهیم در مزدوج ضرب کنیم صورت را در مزدوج ضرب می‌کنیم و به جمع می‌کنیم. در مزدوج ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n(\sqrt{n^2+1} - n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2n \cdot \frac{1}{2n} = 1$$

$$\frac{(n^2+1) - n^2}{2n}$$

نکته: می‌توانیم n در توان باشد و یا به خاصیت حد می‌توانیم و می‌توانیم حد است.

مثال: حاصل
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2^{n+2}}$ حد است؟

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 3^n}{3^n + 2^{n+2}} = \frac{2^n}{2^{n+2}} = \frac{2^n - (2^n + 2)}{2^{n+2}} = \frac{-2}{2^{n+2}} = \frac{-1}{2^{n+1}}$$

$a^n > n^b$
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^b}{a^n} = 0$

نکته: (مهم)

۱) $1 + 2 + 3 + \dots + n \rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$

۲) $2 + 4 + 6 + \dots + 2n \rightarrow \frac{n(2n+2)}{2}$

۳) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) \rightarrow \frac{n(2n)}{2} = n^2$

۴) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 \rightarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

۵) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \rightarrow \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$



مثال: محاسبه $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^3 - 4 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{4n^2-1}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - 2^3 - 4 + \dots - 2n}{\sqrt{n^2+1} + \sqrt{4n^2-1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-n}{2n} = -\frac{1}{2}$$

مثال: اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2n^2 + 2n}$ را با استفاده از $S_n = \sum_{p=1}^n (2p-1)$ محاسبه کنید.

$$S_n = \sum_{p=1}^n (2p-1) = 1 + 3 + \dots + 2n-1 = \frac{n}{2} (2n) = n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2n^2 + 2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2}$$

نوع اقسام (0) صفر بتوان صفر و (∞) بی نهایت بتوان صفر:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 = e^{\lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot \ln x} \Rightarrow e^0 = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln n = \infty \times \infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln n}{\frac{1}{n}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{1}{n} = 0$$

مجموع درایم‌های سطر اول و اول ماتریس $A+2I$ در A است.

$$B = A + 2I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}}{21 - 1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{20} & \frac{3}{20} \end{bmatrix}$$

مثال ۵: ماتریس A در A است.

$$1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 2 & -\frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & \frac{3}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \\ -2 & -\frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix}$$

$$4) \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a_{2,2} = \frac{-1}{|A|} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

۱) دترمینان ماتریس اصلی

۲) دترمینان ماتریس معکوس

۳) $\text{Tr}(A)$ = مجموع عناصر روی قطر اصلی A

الف) $|A| = 9 - 10 = -1$

$$|A^*| = |A|^2 = (-1)^2 = 1 \quad \text{ب) } |A^{-1}| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{-1} = -1$$

ج) $\begin{bmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \\ + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -3 \end{bmatrix} \Rightarrow -3 + 1 + 1 = -1$

نیل سوال ۹۹ به هم $AX=B$ و $XA=B$:

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1} \cdot B$$

$$XA=B \Rightarrow X=B \cdot A^{-1}$$

سوال ۹۹ به هم $AX=B$ باشد $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 54 \end{bmatrix}$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 54 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -14 & 32 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{12 - (-16)} = \begin{bmatrix} \frac{9}{24} & \frac{1}{6} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{10} \times \left(\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -4 & 9 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 54 \end{bmatrix}$$

سوال ۹۹ به هم $AX=A-A^t$ باشد $A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \frac{\pi}{4} X = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 4 \end{bmatrix} \frac{\pi}{4} - \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \frac{\pi}{4}$$

اول جایگزین می کنیم و بعد از $\frac{\pi}{4}$ حالتی داریم بعد سوال سه سوالی سوالی بقیه سوالی جا.

ادامه سوال بعدی سوالی :

سوال ۹۹ به هم $X \cdot A = B$ باشد $B = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$ و $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$

$$X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ -\frac{4}{10} & \frac{2}{10} \end{bmatrix} =$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}}{4 - (-12)} = \begin{bmatrix} \frac{3}{16} & \frac{1}{16} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \end{bmatrix}$$

این را به صورت قرار دهید

مثال: به ازای کدام مقدار K دستگاه
 خازد جواب است؟

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ x - y + 2z = -3 \\ 2x - y + Kz = 2 \end{cases}$$

مثال: به ازای کدام مقدار K دستگاه

۱) $\frac{\Delta}{\Delta}$

۲) $\frac{r}{r}$

۳) $\frac{11}{r}$

۴) $\frac{v}{F}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & K \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-1-K+2) - (-2-2+2K) = (1-K) - (-4+2K) = 0$$

$$\Rightarrow 11 - 2K \Rightarrow 11 = 2K \Rightarrow K = \frac{11}{2}$$

$$\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx + y = 5 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$$

مثال: به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات سازگار است؟
 معادله ۱: $2x + my = 1$
 معادله ۲: $mx + y = 5$
 معادله ۳: $x - 2y = 4$

$$\begin{cases} 2x + my - 1 = 0 \\ mx + y - 5 = 0 \\ x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & m & -1 \\ m & 1 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow (2m - 1 - 5m) - (20 - 1 - 4m^2) = 0$$

$$4m^2 - 3m - 19 = 0$$

$$(4m + 9)(4m - 12) = 0$$

$$m = -\frac{9}{4} \quad m = 3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

مثال: به ازای کدام مقدار a معادله سازگار است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۹ ۴) ۷

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & a \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow -2a - (-7 - a) = 0 \Rightarrow -a + 7 = 0 \Rightarrow a = 7$$



$$\begin{array}{l} i \quad j \quad k \\ 3i - j + k \\ 2i + aj \\ i + 2j - k \end{array} \quad \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & a & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & a+2 & -2 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & a+2 & -2 \end{pmatrix}$$

۱- به ازای هر مقدار a دستگاه خطی تنها جواب یکتا دارد.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ ax_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll} a \neq \frac{1}{3} & (1) \\ a \neq \frac{1}{3} & (2) \\ a = \frac{1}{3} & (3) \\ a = \frac{1}{3} & (4) \end{array}$$

در موارد زیر درجه آزادی متغیرها را مشخص کنید:

۱- دستگاه $AX = \vec{0}$ تنها جواب یکتا داشته باشد.

۲- دستگاه $AX = B$ جواب داشته باشد. (تعداد متغیرها برابر با تعداد معادلات باشد)

۳- بردار مستقل خطی باشند.

۴- ماتریس وارون پذیر باشند.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

تعداد بردارهای ویژه - بردارهای ویژه: لذا رانک مقدار ویژه برابر با رانک A داریم.

$$|A - \lambda I| = 0$$

معادله مشخصه (یا صفر)

نکته: ۱- تعداد متغیرها برابر با تعداد سطرها و ستونها باشد.

۲- بردار ویژه برابر با بردار A می باشد.

رشته تحصیلی: ... پایه تحصیلی: ...

بردار صفر و ویرانه: بردار صفر و ویرانه را به بردار و ویرانه متناظر با بردار و ویرانه لاتا برای ماتریس A می‌نامند.

هرگاه $AV = \lambda V$ باشد.

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد. ماتریس سترنی X و عدد حقیقی λ را برای بردار V و ویرانه λ پیدا کنید. $AX = \lambda X$

برای $\lambda = 1$: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

برای $\lambda = 2$: $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$

سوال: (محاسبه ویرانه را می‌خواهد). این گزینش برای درست است و حقیقی برابر جمع مقادیر است. (بررسی)

$\lambda_1 + \lambda_2 = 3$

مثال: اگر $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}$ باشد. اتحاد بردار و ویرانه تقصیر مقدار و ویرانه را بویستند نام است.

1) $3x + 2y = 0$ 2) $3x + 3y = 0$ 3) $3x - 4y = 0$ 4) $2x - 3y = 0$

$|A - \lambda I| = 0$

$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ -3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)(-1-\lambda) + 6 = 0$

$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 2 \end{cases}$

$AV = \lambda V$ $V = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = x \Rightarrow 3x + 2y = 0 \\ -3x - y = y \Rightarrow -3x - 2y = 0 \end{cases}$

مثال: برای گزینش مقدار و ویرانه ماتریس قابل چندی شود.

$A = \begin{bmatrix} -3 & -9 & 12 \\ 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\begin{vmatrix} -3-\lambda & -9 & 12 \\ 1 & 3-\lambda & 4 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$-\lambda(1-\lambda)(1-\lambda) - (-1)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0 \Rightarrow \lambda(\lambda-1)(\lambda-1) = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

مثال: مقدار A یکی از بردارهای ویژه A ، $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ می‌باشد.

$$AV = \lambda V \Rightarrow \begin{bmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a-1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda \\ 0 \\ -\lambda \end{bmatrix}$$

$$-1 = -\lambda \Rightarrow \lambda = 1 \Rightarrow a-1 = 1 \Rightarrow a = 2$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

ماتریس همبستگی، همبستگی، همبستگی:

$$h_3 = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

$$h_2 = \begin{bmatrix} a & b \\ d & e \end{bmatrix}$$

$$h_1 = [a]$$

$$h_3 \gg 0, h_2 \gg 0, h_1 \gg 0$$

الگوریتم همبستگی همبستگی و همبستگی همبستگی
یکی از آن‌ها صفر باشد و همبستگی همبستگی است.

$$h_3 \ll 0, h_2 \gg 0, h_1 \ll 0$$

همبستگی همبستگی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow H_3 = 24 - 9 = 15 > 0$$

مثال: ماتریس همبستگی همبستگی است.

$$H_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \Rightarrow H_2 = (4-1) = 3 > 0$$

$$H_1 = |3| = 3 > 0$$

رتبه همبستگی (Rank) مقدار همبستگی مستقل خطی، Rank، رتبه همبستگی.

رتبه همبستگی، رتبه همبستگی، رتبه همبستگی، رتبه همبستگی.

مقدار همبستگی همبستگی همبستگی، رتبه همبستگی، رتبه همبستگی.

اول درجه‌های H_3 را می‌بینیم اگر صف‌های خط اول و دوم و سوم و چهارم را با هم جمع کنیم تا به H_2 برسیم تا زمانی که مخالف صف‌ها

$$H_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow H_3 = 0 \quad \times$$

چون که مخالف صف‌ها را به هم می‌زنیم می‌شود 0.

$$H_2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow H_2 \neq 0, \quad \checkmark \quad R=2$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 \\ 4 & 4 & 5 & 9 \\ 5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

مثال: رتبه ماتریس مقابل چندی شود؟

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{رتبه ماتریس } 2$$

$$R=2$$

$$\text{سطر دوم} + \text{سطر چهارم} = \text{سطر اول}$$

$$\text{سطر دوم} - \text{سطر اول} = \text{سطر چهارم}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{matrix} \times 2 \\ \oplus \end{matrix}$$

مثال: رتبه ماتریس مقابل چندی شود؟

$$\text{سطر دوم} + (\text{سطر اول} \times 2) = \text{سطر سوم}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$$

$$\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

$$= 2^n \text{ تعداد زیر مجموعه ها}$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

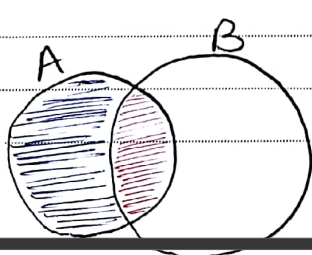
$$A \cup A' = U$$

$$(A \cup B)' = A' \cap B'$$

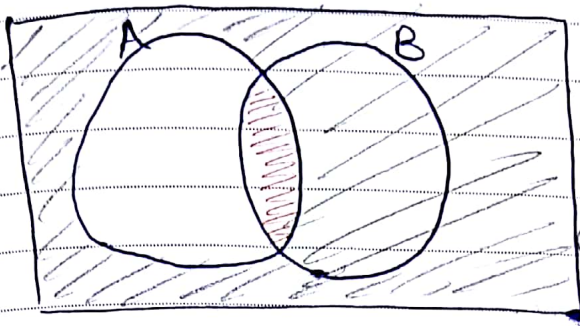
$$(A \cap B)' = A' \cup B'$$

$$\text{مثال: حاصل } [(A \cap B) \cup (A - B)] \cap A' \text{ در مجموعه } S$$

$$A \cap A' = \emptyset$$

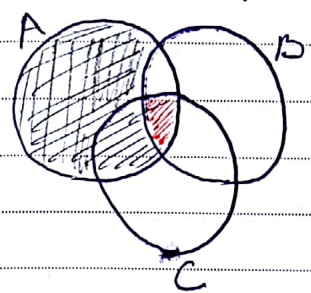


- مثال: حاصل
- ۱) $\emptyset$
 - ۲) $A \cap B'$
 - ۳) $B \cup A$
 - ۴) $B \cup A'$



A' یعنی تمام مجموعه‌ها جز از A
 و چون هیچ مربع داریم $(A-B)'$ بخاطر همین
 در کل مستطیل کسره

مثال: حاصل $(A \cap B \cap C) \cup (A-B) \cup (A-C)$ در یک اصل
 ۱- درون ۲- خارج ۳- خارج



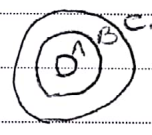
مثال: A, B, C سه مجموعه اند، در یک زیر مجموعه نسبت

۱) $(A \cap B)' = A' \cup B'$

x ۲) $A \cap B = A \cap C \Rightarrow B = C$
 $\emptyset \cap B \quad \emptyset \cap C$

۳) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 قانون

۴) $A \subset B \subset C \Rightarrow A \cap B \cap C = A$



$A_i = \{x : |x| \leq i, x \in \mathbb{Z}\}$

مثال: حاصل قابل درک است

$(A_F - A_r) \times A_r$

حاصل حاصل ضرب در

$A_F = \{|x| \leq 4\} = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$$A_p = \{-16, -16, -16, \dots, 16, 16, 16\}$$

$$A_r = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$(a+b)^n$$

بسط:

$$a^{n-k} b^k = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

ضرب

$$(x+y)^n$$

مثال: مجموع ضرایب بسط مقابل درم است؟

$$\text{مجموع ضرایب} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^{12}$$

مثال: در بسط مقابل ضرایب جمله ششم x درم است؟

$$\left(x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^{12}$$

$$= \binom{12}{k} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k x^{24-2k} = \binom{12}{k} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k x^{24-2k}$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}} k + 24 - 2k = 1 \quad \Rightarrow \quad k - 24 + 4k = -1 \quad \Rightarrow \quad 5k = 23 \quad \Rightarrow \quad k = 4.6$$

$$\Rightarrow 5k = 23 \Rightarrow k = 4.6$$

$$\text{ضرب} = \binom{12}{9} \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} \cdot \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{220}{\sqrt{2}}$$

$$\left(x - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)^4$$

مثال: در بسط مقابل جمله ششم x درم است؟

مثال: در بسط متقابل: $(\frac{1}{x})^{\frac{1}{2}}$ ضرب جمله بسط

$$\binom{12}{K} \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^K \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{12-K}$$

$$= \binom{12}{K} \left(\frac{1}{x}\right)^{12-K} \cdot \frac{-\frac{1}{2}K}{x} \cdot \frac{12-2K}{x} = -1$$

ضرب

$$-\frac{1}{2}K + 12 - 2K = -1 \Rightarrow -\frac{5}{2}K = -13 \Rightarrow K = 10$$

اگرچه ضریب

مثال: در بسط متقابل $(1+x)^{\frac{1}{3}}$ ضرب x^k در بسط است

$$\binom{\frac{1}{3}}{K} x^K \cdot (1)^{\frac{1}{3}-K} = \binom{\frac{1}{3}}{K} x^K = 2$$

$$\text{ضرب} = \binom{\frac{1}{3}}{K} = \frac{\frac{1}{3} \cdot (\frac{1}{3}-1) \cdot (\frac{1}{3}-2) \cdot (\frac{1}{3}-3)}{K \cdot (K-1) \cdot (K-2) \cdot (K-3)} = \frac{-1}{24K}$$

$$\left(\sqrt{x} + \frac{1}{x} - 1\right)^4$$

مثال: در بسط متقابل مجموع جمله x^k در بسط است

$-4A(K)$ $-44(K)$ $-49(K)$ $-44(K)$

$$\binom{4}{i \ j \ K} \cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^i \cdot \left(x^{-1}\right)^j \cdot (-1)^K$$

$$= \binom{4}{i \ j \ K} (-1)^K \cdot \frac{\frac{1}{2}i - j}{x} = 0 \quad \frac{1}{2}i - j = 0 \Rightarrow i = 2j$$

ضرب

$$\begin{cases} i = 2j \\ i + j + K = 4 \end{cases}$$

$$i = 0 \Rightarrow j = 0 \Rightarrow K = 4 \Rightarrow \text{ضرب} = \binom{4}{0 \ 0 \ 4} \cdot (-1)^4 = 1$$

$$i = 1 \Rightarrow j = 2 \Rightarrow K = 1 \Rightarrow \text{ضرب} = \binom{4}{1 \ 2 \ 1} \cdot (-1)^1 = -4$$

$$i=1 \rightarrow j=4 \rightarrow k=0 \rightarrow \dots = \left(\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right) \cdot 4! \cdot 2! \cdot 1! =$$

$$i=1 \rightarrow j=4 \rightarrow k=-1 \times$$

$$1 - 4 + 15 = -44$$

سری: مجموع با ضرایب جدار سری دوم

سری زکسکونی: n در ضریب می باشد.

روش حل: (۱) ضریب را تجزیه کنید (۲) سر را جدا کنید (۳) جمله اول را بنویسید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$n^2 + n = n(n+1)$

تست ۹۹ از تست:

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1} \right)$$

$n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$

مسئله: حاصل سری مقابل چند سری است:
اول ضریب را تجزیه کنید و به صورت $\frac{1}{n^2 - 1}$ بنویسید
دوم آن را به صورت $\frac{1}{(n-1)(n+1)}$ بنویسید

$$= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \dots \right)$$

$$\text{حاصل} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 2n} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right)$$

$n^2 + 2n = n(n+2)$

مسئله: حاصل سری مقابل چند سری است؟

چون ضریب را به اول ضرب (۲) می کنیم

$$= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots$$

بدین صورت ۲ سری به هم می رسد.

$$\text{حاصل} = \frac{1}{2}$$



روش حل: ۱) ابتدا به جداول مراجعه کنید

$$\text{مجموع} = \frac{a}{1-r}$$

جدول اول a

$$r = \frac{\text{جدول دوم}}{\text{جدول اول}}$$

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{r^{i+1}}{r^i} = \frac{r}{r} + \frac{1}{r} + \frac{14}{r^2}$$

مثال: حاصل سری مقابل جزی سود

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

$$= \frac{\frac{r}{r}}{1 - \frac{r}{r}} = \frac{r}{1-r}$$

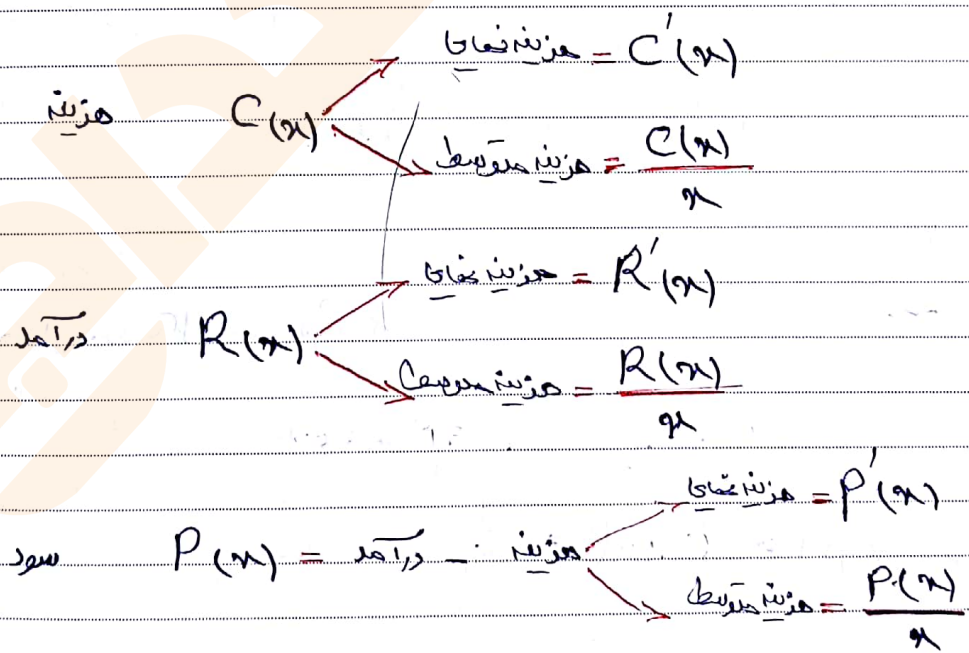
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n+1}}{r^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^n}{r^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}$$

مثال: جمع سری مقابل جزی سود

$$= \left(\frac{r}{r} + \frac{r}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots \right) + \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{r^2} + \dots \right)$$

$$= \frac{\frac{r}{r}}{1 - \frac{r}{r}} + \frac{\frac{1}{r}}{1 - \frac{1}{r}} = r + \frac{1}{r} = \frac{5}{r}$$

کاربرد ریاضی در مدیریت (درآمد - هزینه - سود)



جاسد. $y = 2x' + x$
 - $y = 2x' + x$
 - $y = 2x' + x$
 - $y = 2x' + x$

۱) ۷۵

۲) ۱۰۰

۳) ۱۲۰

۴) ۱۲۵

$$y = -x^2 + 11x + 14$$

$$y = 2x' + x$$

$$\pi = \text{حزب} - \text{درآمد}$$

$$\pi \cdot y = x(-x^2 + 11x + 14)$$

$$\pi = -x^3 + 11x^2 + 14x - (2x^2 + x)$$

$$\pi = -x^3 + 9x^2 + 13x$$

$$\pi' = -3x^2 + 18x + 13 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = \frac{-18 \pm \sqrt{18^2 - 4(-3)(13)}}{-2(-3)} = 5 \end{cases}$$

$$\pi(5) = -125 + 150 + 13$$

مثال: اگر مقدار کالا و تابع تقاضا به صورت $P = 14 - 2x - x^2$ و تابع هزینه به صورت

$$C = 1 + 4x$$

$$\pi = TR - TC$$

$$TR = x \cdot P = x(14 - 2x - x^2) = -x^3 - 2x^2 + 14x$$

$$\bar{C} = \frac{C(x)}{x} = \frac{1}{x} + 4 \Rightarrow C(x) = 1 + 4x$$

$$\pi = (-x^3 - 2x^2 + 14x) - (1 + 4x)$$

$$\pi = -x^3 - 2x^2 + 10x - 1$$

$$(-2x+4)(-2x-10)=0$$

$$x=2$$

$$\pi(x) = -(x)^3 - 2(x)^2 + 20(x) - 8 =$$

نقطه سر به سر نقطه ای که در آن به ازای x برابر بوده یعنی سر و صفی است.

مثال: اگر هزینه ثابت تولید ۹۰۰۰ ریال و هزینه متغیر ۴٪ فروش و قیمت فروش هر واحد ۵۰ ریال باشد.

جواب: نقطه سر به سر برآورد است.

$$C(x) = 20x + 4000$$

$$R(x) = 50x \quad 50x = 20x + 4000$$

$$R(x) = 50x$$

$$50x = 20x + 4000$$

$$30x = 4000 \Rightarrow x = 133.33$$

$$Q = \frac{F}{P-V} = \frac{4000}{50-20} = \frac{4000}{30} = 133.33$$

مازاد صرف نشده و تولید نشده.

ص ۱۴۰

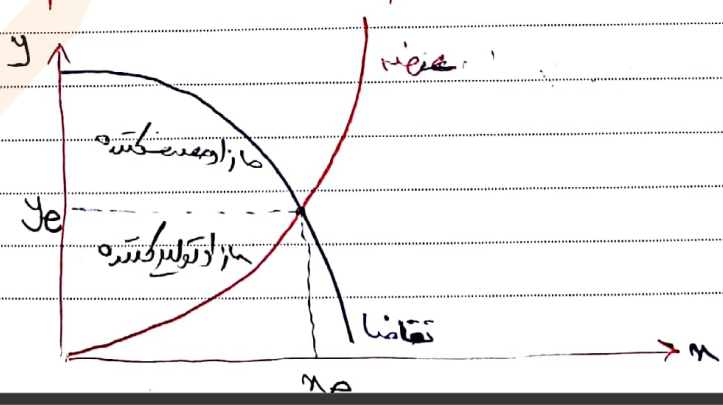
۱) توابع عرضه و تقاضا را برابر قرار داده و e^x را باید.

۲) e^x را در اول یک از عبارات قرار داده و e^x را باید (۴ تعاریف)

$$\int e^x - y e^x$$

(۳)

$$\int e^x - y e^x$$



میزان مصرف گذشته در نقطه تعادل بدست می آید

$$y = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 13$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) + 13 = -\frac{1}{2}x^2 + x + \left(-\frac{1}{2} + 13\right)$$

$$-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{25}{2} = 2x + 5$$

$$-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{15}{2} = 0 \xrightarrow{\times (-2)} x^2 + 2x - 15 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+5) = 0$$

$$x_e = 3 \Rightarrow y_e = 11$$

$$\int_0^3 \left(-\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{25}{2} - 11\right) dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 + \frac{x^2}{2} + \frac{9}{2}x\right]_0^3 \Rightarrow \frac{-9+9+9}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\text{جواب} = \frac{9}{2} = 4.5$$

مثال: اگر مقدار کال و y متغیر و زمان باشد در وضعیت پایدار کال مصرفی و مقدار مصرفی

میزان مصرف گذشته در نقطه تعادل بدست می آید

$$y = -x^2 + 2x + 18 \quad y' = 2x + 9$$

$$\left| \int_1^{x_e} y_e - y \right| \quad \left| \int_1^3 (-x^2 + 2x + 18) - 15 \right|$$

(نقطه شروع زمان)

نتیجه رشد روزانه: $Kt \rightarrow$ زمان

$$A_t = A \cdot e^{Kt}$$

اولی: A_t (مقدار در زمان t)
دوم: A (مقدار اولیه)

مثال: اگر سود به صورت پیوسته نرخ سالانه ۱۰٪ باشد پس از چند سال سرمایه ۲ برابری می شود

$$A_t = 2A_0 \quad 2A_0 = A_0 e^{\frac{1}{10}t} \Rightarrow \frac{1}{10}t = \ln 2$$

$$t = 10 \cdot \ln 2$$

مثال: نرخ رشد سالانه چقدری است که در هر ۱۰۰۰ سال سرمایه ۲ برابری شود

$$\ln 2 = 0.693 \quad 2A_0 = A_0 e^{\frac{15}{1000}t} \Rightarrow \frac{15}{1000}t = \ln 2 \Rightarrow \frac{15}{1000}t = 0.693 \Rightarrow t = \frac{0.693 \times 1000}{15} = 46.2$$

ANDISHEH

$$P_n = P_0 \left(1 + \frac{r}{100}\right)^n$$

مثال: در سپرده‌ی بانکی سود در پایان هر ماه بر سسای اضافی سسوه. با تسع سپرده‌ی ۱۲٪ سسای ۱۰٪ سال

$$P_n = P_0 \left(1 + \frac{0.12}{12}\right)^{12 \times 1}$$

چند برابر می‌شود؟

اعداد مختلف:

$$Z = \sqrt{14 - 4x^2 - y^2 + 8x + 4y}$$

مثال: برد تابع را محاسبه کنید است؟

$$[0, \dots] \quad F(\text{بجاری}) = [0, \dots]$$

$$\begin{cases} F'_x = -8x + 8 = 0 \rightarrow x = 1 \\ F'_y = -2y + 4 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases}$$

$$F(1,2) = \sqrt{14 - 4(1)^2 - 2^2 + 8(1) + 4(2)} = 5$$

اعداد مختلف:

دمازی
کارتری

$$Z = x + iy = (x, y)$$

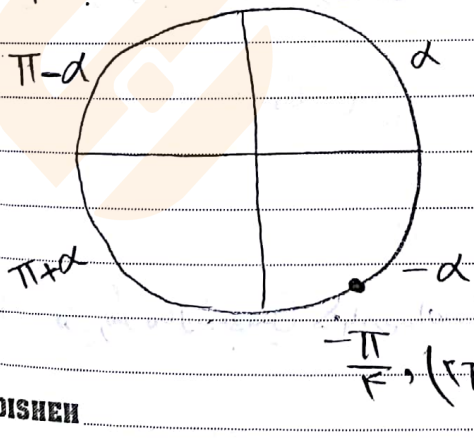
$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan \theta = \frac{y}{x}$$

قطبی

$$Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

مثال: نقطه a در مختصات کارتری: $-1 + i$ باشد. مختصات این نقطه در دستگاه قطبی را است؟



$$(1, -1)$$

$$\left(1, \frac{\pi}{F}\right)$$

$$r = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{F}\right)$$

$$\tan \theta = \frac{-1}{1} = -1 \rightarrow \theta = -\frac{\pi}{F}$$

$$\left(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{F}\right)$$

$$\left(-\frac{\pi}{F}, \left(2\pi - \frac{\pi}{F}\right) = \frac{7\pi}{F}\right)$$

$$\left(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{F}\right)$$

مسئله: اگر z معکوب باشد $z(4)$ پس $z(1)$

$$z = \frac{3-i}{1+i} \left(\frac{1-i}{1-i} \right) = \frac{4-3i-2i+i^2}{1-i^2} = \frac{3-5i}{2} = 1-i$$

$$z^4 = (1-i)^4 = ((1-i)^2)^2 = (1-2i+i^2)^2 = (-2i)^2 = 4i^2 = -4$$